

Вычислительная сложность настольных и компьютерных игр

Федорович Арсений

Физтех-школа прикладной математики и информатики
МФТИ

11 марта 2025 г.

Под руководством Мусатова Д. В.
МФТИ

1. Введение
2. Существующие результаты
3. План работы
4. Список литературы

Вычислительная сложность игр описывает асимптотическую сложность игр или их принадлежность к каким-либо сложностным классам, а так же их полноту в этих классах при растущем размере игрового поля. Фиксированный размер поля нас в данном случае не интересует, потому что в таком случае решение находится за константу. Основной фокус будет на доказательстве полноты в каком-либо сложностном классе.

В книге [Hearn and Demaine(2009)] авторы привели набор универсальных графовых игр для различных видов настольных или компьютерных игр (с 0, 1, 2 и большим числом игроков) и показали их полноту в соответствующих классах.

Также полнота была показана для планарных универсальных игр. Это позволяет моделировать ими то, что происходит в настольной или компьютерной игре. В случае же сводимости формул к играм не всегда видна взаимосвязь между формулами и конструкциями игры.

Во второй части книги авторы привели новые результаты, определив сложностные классы и показав полноту в них, для таких игр, как **TipOver**, **Hitori**, **sliding-block puzzles** и др.

Определение

Граф ограничений - неориентированный граф, вершины которого имеют порог - значение от 0 до 2, а ребра имеют вес 1 (красного цвета) или 2 (синего цвета).

Замечание

На самом деле, граф будет иметь направления ребер, которые могут меняться в зависимости от определенных условий. Смену направлений ребер будем называть переключениями.

Определение

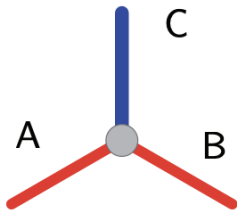
Условие корректности - суммарный вес входящих ребер больше либо равен порогу вершины.

Условие корректности накладывает определенные ограничения на то, каким граф может быть, поскольку переключать ребра разрешено только в соответствии с ним.

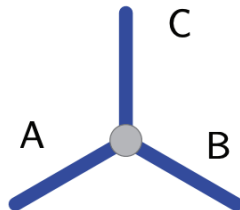
Гаджеты AND и OR

Цель - цепочкой переключений ребер добиться переключения конкретного целевого ребра. При этом, например, в случае игр с двумя игроками у каждого игрока могут быть свои целевые ребра, которые они должны переключить, чтобы победить.

Примеры гаджетов:



(a) AND vertex. Edge C may be directed outward if and only if edges A and B are both directed inward.



(b) OR vertex. Edge C may be directed outward if and only if either edge A or edge B is directed inward.

Ограниченные и неограниченные игры

В дальнейшем сфокусируемся лишь на играх с одним игроком. Однако, вне зависимости от числа игроков, все игры подразделяются на два вида - **ограниченные** и **неограниченные**. В ограниченных играх можно сделать полиномиальную оценку на число ходов. Обычно это предполагает наличие некоторого ресурса, который расходуется в процессе игры. В неограниченных, напротив, нет ограничения на количество ходов. Часто в таких играх можно отменять уже сделанные ходы.

Примеры

- **Судоку** являются **ограниченной**, так как с каждым ходом игровое поле заполняется, ходы отменять невозможно
- Игра **TipOver**, в которой игрок должен ронять блоки в правильном порядке, поднять которые уже невозможно, является **ограниченной**
- **Пятнашки** являются **неограниченной**, так как костяшку можно перемещать влево-вправо произвольное количество раз

Ограниченные и неограниченные игры

Получается, что в ограниченном случае недетерминированно вычисленное решение можно проверить за полиномиальное время, что говорит о том, что такие игры лежат в **NP**. Неограниченные же игры лежат в **NPSPACE**, что равно **PSPACE** по теореме Сэвича.

Авторы так же доказали полноту неограниченных и ограниченных игр в этих классах, что позволяет сводить их к настольным и компьютерным играм. Более формально:

Определение

Ограниченная недетерминированная логика ограничений (BNCL) - это задача

$\{(G, e) \mid \text{можно последовательным переключением ребер } G \text{ переключить } e\},$

при этом переключать ребра можно не больше одного раза

Ограниченные и неограниченные игры

Определение

Неограниченная недетерминированная логика ограничений (UNCL) - это задача

$\{(G, e) \mid \text{можно последовательным переключением ребер } G \text{ переключить } e\},$

при этом переключать ребра можно **многократно**

Теорема

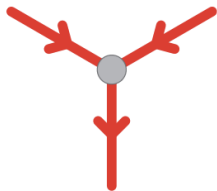
BNCL NP-полна даже для планарных графов, у которых встречаются только вершины вида **CHOICE, AND, FANOUT** и **OR**

Теорема

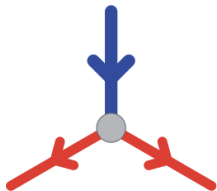
UNCL PSPACE-полна даже для планарных графов, у которых встречаются только вершины вида **AND** и **OR**

План работы

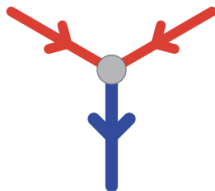
Показать, что можно свести **UNCL** или **BNCL** к выбранной игре с одним игроком. Необходимо показать принадлежность игры к классу **NP** либо **PSPACE**, а затем построить гаджеты, используя игровые конструкции. В случае, если игра оказалась в **NP**, построить **CHOICE**, **AND**, **FANOUT** и **OR**, а в случае **PSPACE** - **AND** и **OR**. Тем самым будет доказана полнота в соответствующем классе.



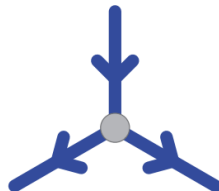
(a) CHOICE



(b) AND



(c) FANOUT



(d) OR



Robert A. Hearn and Erik D. Demaine.

Games, Puzzles, and Computation.

A K Peters, 2009.

ISBN 978-1-56881-322-6.

URL <https://doi.org/10.1201/b10581>.