# Лемма ККМ для решения задач оптимизации

Докладчик: Коваленко Дмитрий Борисович
Руководитель: Блудов Михаил Васильевич, МФТИ

11.03.2025

# Задача линейного программирования

Прямая задача:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \langle x, c \rangle,$$
$$\text{s.t. } Ax \geqslant b$$

Двойственная задача:

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \langle \lambda, c \rangle,$$
$$\text{s.t. } A^T \lambda = c,$$
$$\lambda \geqslant 0$$

# Задача линейного программирования

Прямая задача:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \langle x, c \rangle,$$
$$\text{s.t. } Ax \geqslant b$$

Двойственная задача:

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \langle \lambda, c \rangle,$$
$$\text{s.t. } A^T \lambda = c,$$
$$\lambda \geqslant 0$$

**Theorem (О сильной двойственности)**

*Минимум $x^*$ прямой задачи линейного программирования существует тогда и только тогда, когда существует максимум $\lambda^*$ двойственной задачи, и если такие $x^*$ и $\lambda^*$ существуют, то $x^* = \lambda^*$.*

Свойство слабой двойственности считаем очевидным.

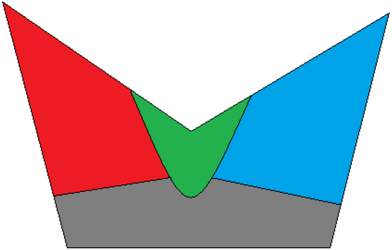
# Мотивация

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Теорема Борсука-Улама} \arrow[d, Leftrightarrow] \\
\text{Симплекс-метод} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{Лемма ККМ} \arrow[d, Leftrightarrow] \\
 & \text{Лемма Шпернера}
\end{tikzcd}$$

# Лемма Кнастера-Куратовского-Мазуркевича

## Theorem

*Пусть $\Delta^n$ – $n$-мерный симплекс на $n+1$ вершине и $\{a_1, \ldots a_{n+1}\} \subset \mathbb{R}^n$ множество его вершин. Назовём семейство $\{F_1, \ldots, F_{n+1}\}$ замкнутых множеств **ККМ-покрытием**, если для любого множества $I \subseteq [n]$ выполнено $conv\{a_i\}_{i \in I} \subseteq \bigcup_{i \in I} F_i$. Тогда для любого ККМ-покрытия выполнено $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \varnothing$.*



# Лемма ККМ для многогранников

**Theorem**

*Пусть $P$ – $d$-мерный многогранник и $\{a_1, \dots a_n\} \subset \mathbb{R}^d$ множество его вершин. Назовём семейство $\{F_1, \dots, F_n\}$ замкнутых множеств* ***ККМ-покрытием****, если оно покрывает $P$ и для любой грани $T \subseteq \partial P$ с набором вершин $V(T) \subseteq \{a_1, \dots a_n\}$ выполнено $T \subseteq \bigcup_{a_i \in V(T)} F_i$. Тогда для любого ККМ-покрытия и для любой точки $c \in P$ найдётся такое множество вершин $S \subseteq \{a_1, \dots, a_n\}$, что $c \in conv(S)$ и $\bigcap_{a_i \in S} F_i \neq \varnothing$.*

Здесь под *гранью* подразумевается грань любой размерности. Например, для трёхмерного многогранника гранями являются вершины, рёбра и двумерные грани.

## Основные теоремы

### Theorem

*Пусть* $0 \notin conv(A)$, $\dim cone(A) = n$ *и* $c \in cone(A)$, *тогда выполняется свойство сильной двойственности.*

Из этой теоремы разбором случаев будет следовать теорема о сильной двойственности.

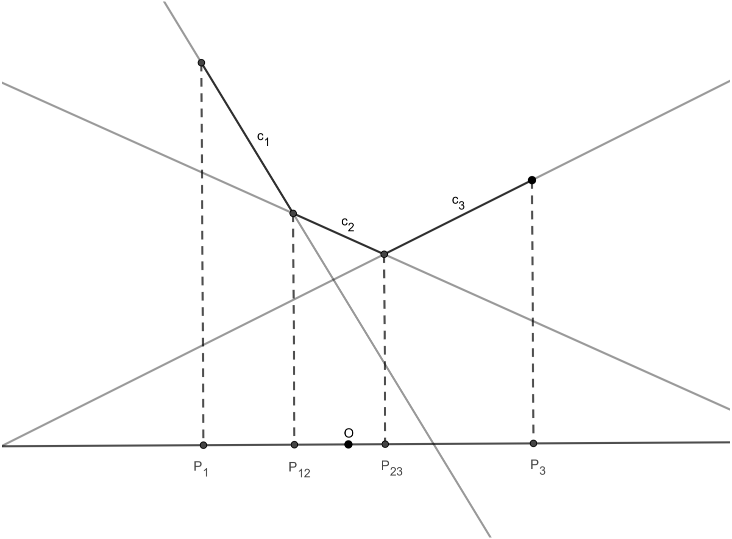
## Основные теоремы

Теорема ниже является следствием из Леммы ККМ для многогранников.

### Theorem (ККМ с линейными условиями)

*Пусть выпуклая оболочка точек* $A := \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^d$ *является* $d$*-мерным многогранником. Назовём семейство* $\{F_1, \dots, F_{n+1}\}$ *замкнутых множеств* ***ККМ-покрытием*** *замкнутого шара* $B^d$*, если для любой точки* $x \in \partial B^d$ *выполнено* $x \in F_i \Leftrightarrow \langle x, a_i \rangle = \min_{j=1}^{n} \langle a_j, x \rangle$*. Тогда для любого ККМ-покрытия и для любой точки* $c \in \mathrm{conv}(A)$ *найдётся множество вершин* $S \subseteq A$*, что* $c \in \mathrm{conv}(S)$ *и* $\bigcap_{a_i \in S} F_i \neq \varnothing$*.*

# Цветная проекция



## Немного техники

Выше получили покрытие $\{F_1, \ldots, F_n\}$ замкнутыми множествами пространства $\mathbb{R}^{d-1}$. Рассмотрим естественный гомеоморфизм $f$ между $(d-1)$-мерным открытым шаром $B^{d-1}_{<1}$ и пространством $\mathbb{R}^{d-1}$.

# Немного техники

Выше получили покрытие $\{F_1, \ldots, F_n\}$ замкнутыми множествами пространства $\mathbb{R}^{d-1}$. Рассмотрим естественный гомеоморфизм $f$ между $(d-1)$-мерным открытым шаром $B^{d-1}_{<1}$ и пространством $\mathbb{R}^{d-1}$.
Тогда покрытие (раскраска) шара определяется по правилу
$x \in F_i' \Leftrightarrow f^{-1}(x) \in F_i$.

**Theorem**

*Раскраска выше продолжается на границу шара по правилу*
$x \in F_i' \Leftrightarrow \langle x, a_i \rangle = \min_{j=1}^{n} \langle a_j, x \rangle$.

# Немного техники

Выше получили покрытие $\{F_1, \ldots, F_n\}$ замкнутыми множествами пространства $\mathbb{R}^{d-1}$. Рассмотрим естественный гомеоморфизм $f$ между $(d-1)$-мерным открытым шаром $B^{d-1}_{<1}$ и пространством $\mathbb{R}^{d-1}$. Тогда покрытие (раскраска) шара определяется по правилу $x \in F'_i \Leftrightarrow f^{-1}(x) \in F_i$.

## Theorem

*Раскраска выше продолжается на границу шара по правилу* $x \in F'_i \Leftrightarrow \langle x, a_i \rangle = \min_{j=1}^n \langle a_j, x \rangle$.

Наконец, воспользуемся Теоремой ККМ с линейными условиями и получим множество $S$ и точку $\widetilde{x}^* \in \bigcap_{a_i \in S} F'_i$. Утверждается, что обратная проекция точки $\widetilde{x}^*$ и есть искомый минимум $x^*$. Точка $\lambda^*$ строится по множеству $S$ так, чтобы $\sum_{a_i \in S} \lambda^*_i a_i = c$. Затем несложной проверкой и в силу слабой двойственности убеждаемся, что $x^* = \lambda^*$.

# Проблемы и узкие места

1. Нужно расширить алгоритм для случая $c \in \mathrm{conv}(A)$.

# Проблемы и узкие места

1. Нужно расширить алгоритм для случая $c \in \mathrm{conv}(A)$.
2. Готового алгоритма для поиска множества $S$ в Лемме ККМ для многогранников может не существовать и он может быть достаточно медленным.

# Сильные стороны

1. Тема довольно слабо исследована, есть пространство для улучшений. Есть идея обобщить доказательство для выпуклого случая. А для невыпуклого может получиться алгоритм для поиска оптимальных условий для задач о дележе.

# Сильные стороны

1. Тема довольно слабо исследована, есть пространство для улучшений. Есть идея обобщить доказательство для выпуклого случая. А для невыпуклого может получиться алгоритм для поиска оптимальных условий для задач о дележе.
2. Топологические методы многочисленны и гибки.

## Сильные стороны

1. Тема довольно слабо исследована, есть пространство для улучшений. Есть идея обобщить доказательство для выпуклого случая. А для невыпуклого может получиться алгоритм для поиска оптимальных условий для задач о дележе.
2. Топологические методы многочисленны и гибки.
3. Некоторые алгоритмы имеют с большой вероятностью быструю эвристику, например алгоритм поиска трёхцветной точки в Лемме Шпернера.