

# Универсальные методы для стохастических вариационных неравенств

Барсуков Сергей  
Руководитель: А. В. Гасников

Вариационные неравенства нередко возникают в самых разных проблемах оптимизации и имеют многочисленные приложения в математической экономике, теории игр и машинном обучении для задач негладких оптимизаций, генеративно-состязательных сетей и обучения с подкреплением. Наиболее известным аналогом градиентного метода для вариационных неравенств является экстраградиентный метод Г.М. Корпелевич [1]. Одним из современных вариантов экстраградиентного метода является проксимальный зеркальный метод А.С. Немировского [2].

Задачу стохастической выпуклой оптимизации уже разбирали в статье [3], в которой предлагается универсальный метод для решения монотонных стохастических вариационных неравенств на базе проксимального зеркального метода. В новой статье [4] авторы предлагают свой универсальный градиентный спуск для задач стохастической выпуклой оптимизации. Мы предлагаем применение этого метода для стохастических вариационных неравенств, в частности для седловых задач. Такие постановки, например, возникают в задачах состязательного обучения. Преимущества универсального градиентного спуска в том, что он сам настраивается на гладкость задачи и не требует параметров на входе. В данной работе мы доказываем стохастический случай метода, а также изучаем технику рестартов.

В работе получены следующие алгоритм и оценка:

$$O \left( \inf_{\nu \in [0,1]} \left( \frac{(3-\nu)L_\nu}{\varepsilon} \right)^{\frac{2}{1+\nu}} D^2 \right).$$

---

**Algorithm 1** Универсальный проксимальный зеркальный метод (UMP)

---

- 1: Set  $z_0 = \arg \min_{u \in Q} d(u)$ ,  $L_0 = \|g(z_0)\|$ .
  - 2: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**
  - 3:    $w_k = \arg \min_{x \in Q} (\langle g(z_k), x \rangle + L_k \frac{1}{2} \|z_k - x\|^2)$ .
  - 4:    $z_{k+1} = \arg \min_{x \in Q} (\langle g(w_k), x \rangle + L_k \frac{1}{2} \|z_k - x\|^2)$ .
  - 5:    $L_{k+1} = L_k + \max \left( 0, \frac{-2\langle g(w_k), z_{k+1} - w_k \rangle - L_k \|w_k - z_{k+1}\|^2}{D^2 + \|w_k - z_{k+1}\|^2} \right)$ .
  - 6: **end for**
-

# 1 Список литературы

- [1] Корпелевич Г.М. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач Экономика и матем. методы. Т. 12. № 4. С. 747–756.
- [2] Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence  $O(1/T)$  for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems SIAM Journal on Optimization. 2004. V. 15. P. 229–251.
- [3] Anton Rodomanov Ali Kavis Yongtao Wu Kimon Antonakopoulos Volkan Cevher Universal Gradient Methods for Stochastic Convex Optimization. 2024.
- [4] Bach F., Levy K. Y. A universal algorithm for variational inequalities adaptive to smoothness and noise // arXiv:1902.01637.