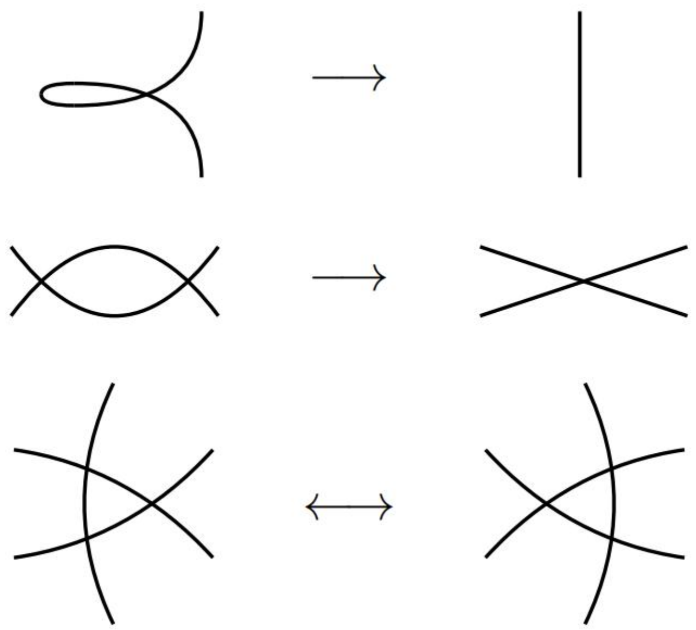
Классификация совокупностей кривых на поверхностях при движениях, сохраняющих когерентность четырехугольников соответсвующего разбиения

под руководством В.О.Мантурова

Платон Марулев

группа Б05-126

Главная гипотеза



Мы рассматриваем совокупности кривых C на Σ поверхности .

Опр : Регион - это компонента связности Σ / C.

Возможна расскраска регионы в белый/черный.
Каждый регион гомеоморфен диску.

Для любой совокупности кривых A существует только одна минимальная (с точки зрения движений) совокупность кривых B(с точностью до движения 3), в которую можно попасть (с помощью движений) из A.

Соответственно есть эта совокупность B будет минимальна и по количеству пересечений кривых.

Предисловие(откуда появилась эта задача)

Основная теорема

Theorem 1.1. *Consider a tiling of a closed oriented surface by quadrilateral tiles. Assume that the vertices of the tiling are colored black and white, so that every edge connects vertices of different color. Associate to each black (resp., white) vertex a point (resp., a line) in the real/complex projective plane, so that all these points and lines are distinct and no point lies on any of the lines associated with adjacent vertices. For each tile*

$$\begin{array}{ccc} A & \text{—} & \ell \\ | & & | \\ m & \text{—} & B \end{array}$$

(here A and B are points and ℓ and m are lines), consider the incidence condition

$(*)$ *the points A, B, and $\ell \cap m$ are collinear.*

If condition $(*)$ holds for all tiles but one, then it also holds for the remaining tile.

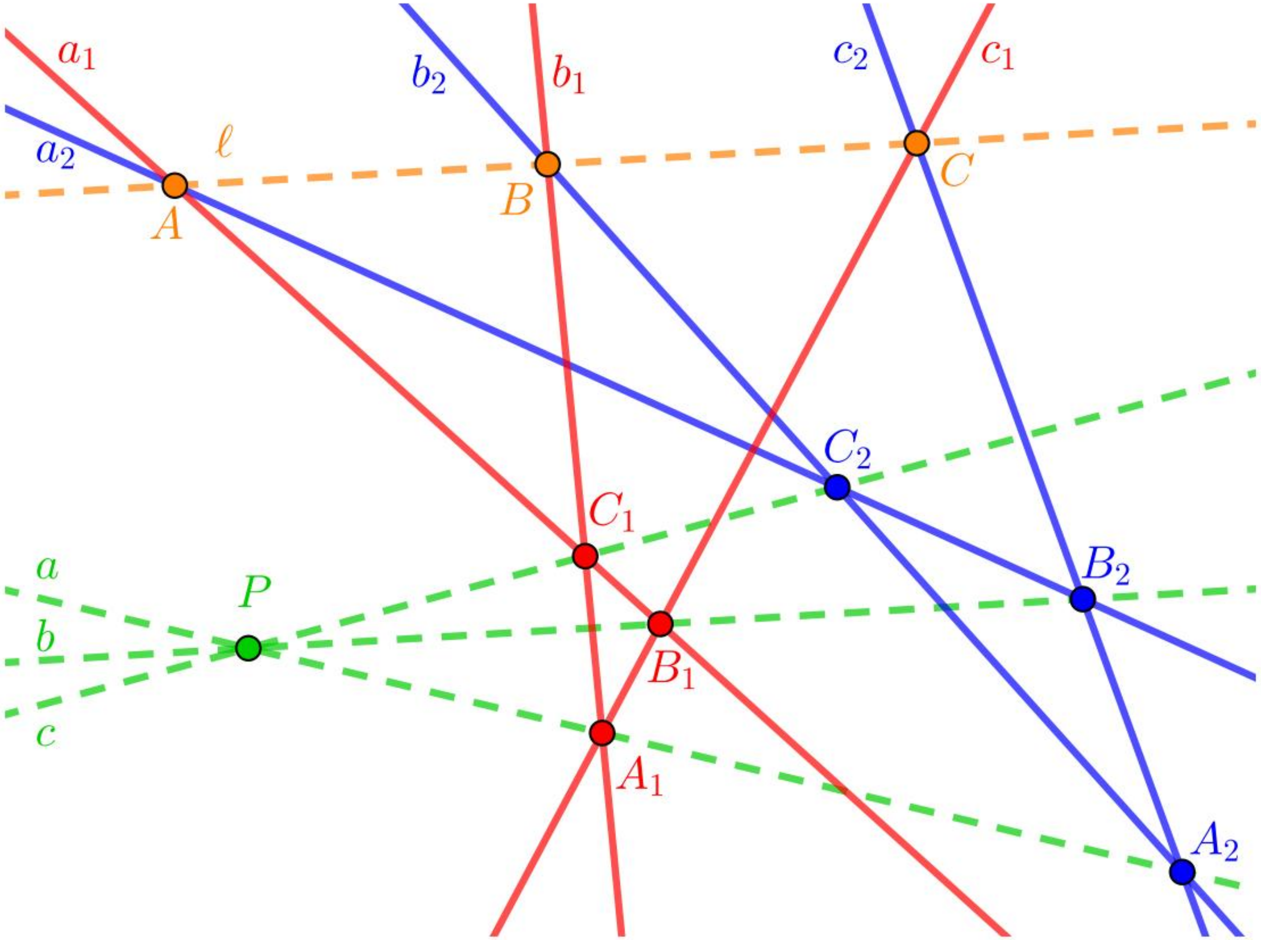
Когерентность разбиения

Опр : Четырехугольник когерентен, если выполняется условие (*)

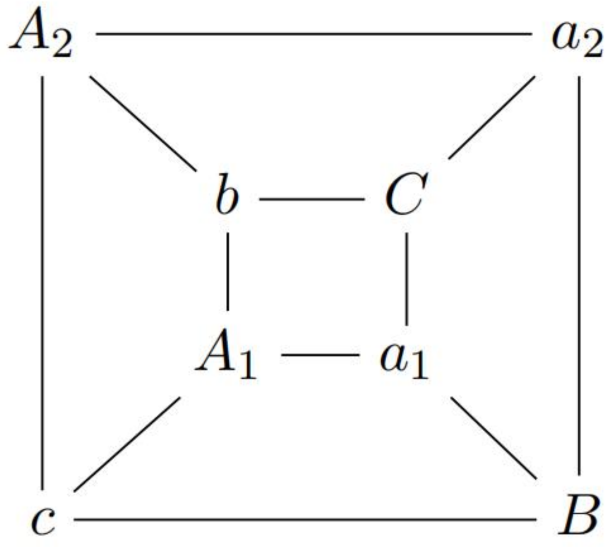
the points A, B, *and* $\ell \cap m$ *are collinear.*

$$\begin{array}{ccc} A & — & \ell \\ | & & | \\ m & — & B \end{array}$$

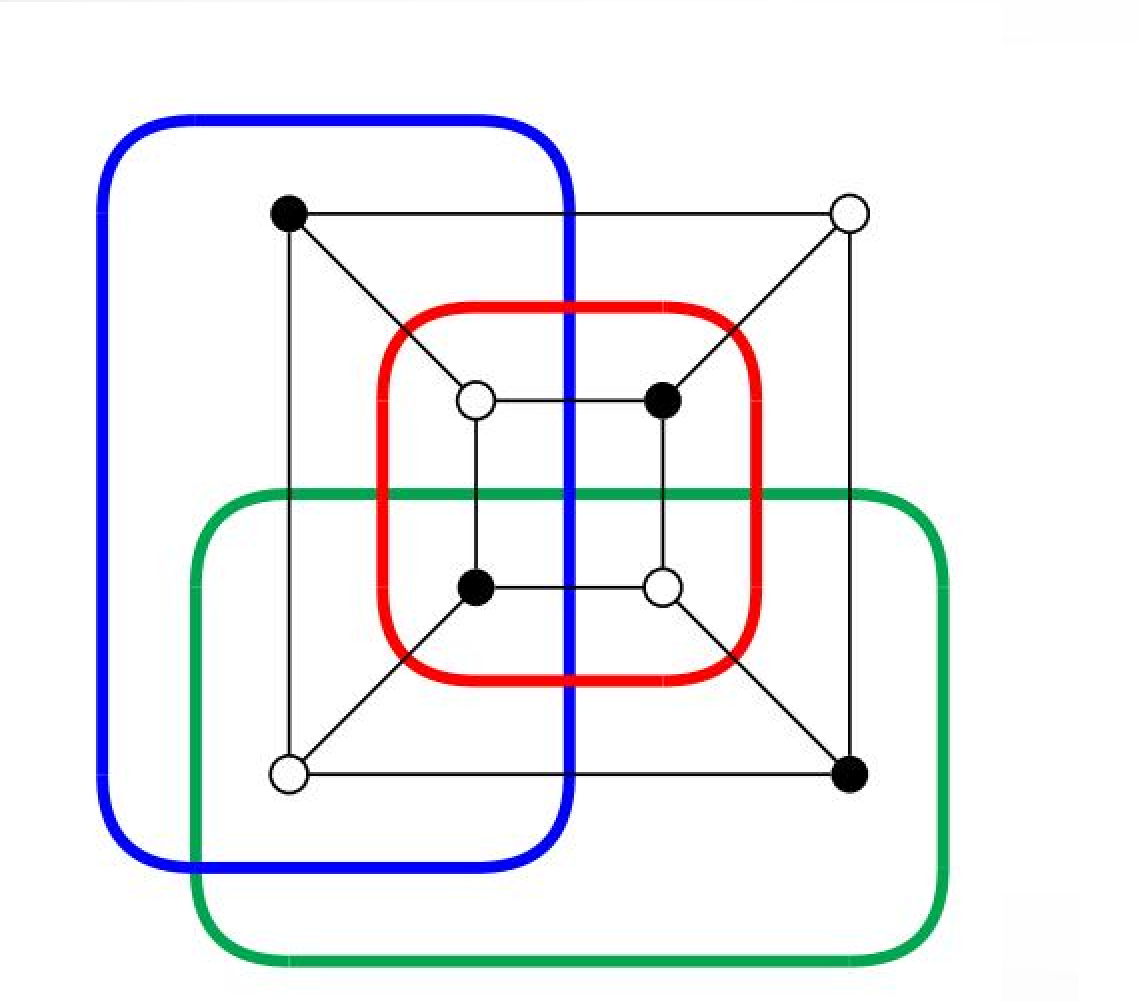
Theorem 3.1 (G. Desargues, *ca.* 1639)**.** *Let a, b, c be distinct concurrent lines on the complex/real projective plane. Pick generic points $A_1, A_2 \in a$, $B_1, B_2 \in b$, $C_1, C_2 \in c$. Then the points $A = (B_1C_1) \cap (B_2C_2)$, $B = (A_1C_1) \cap (A_2C_2)$, $C = (A_1B_1) \cap (A_2C_2)$ are collinear. See Figure* $\boxed{4}$.

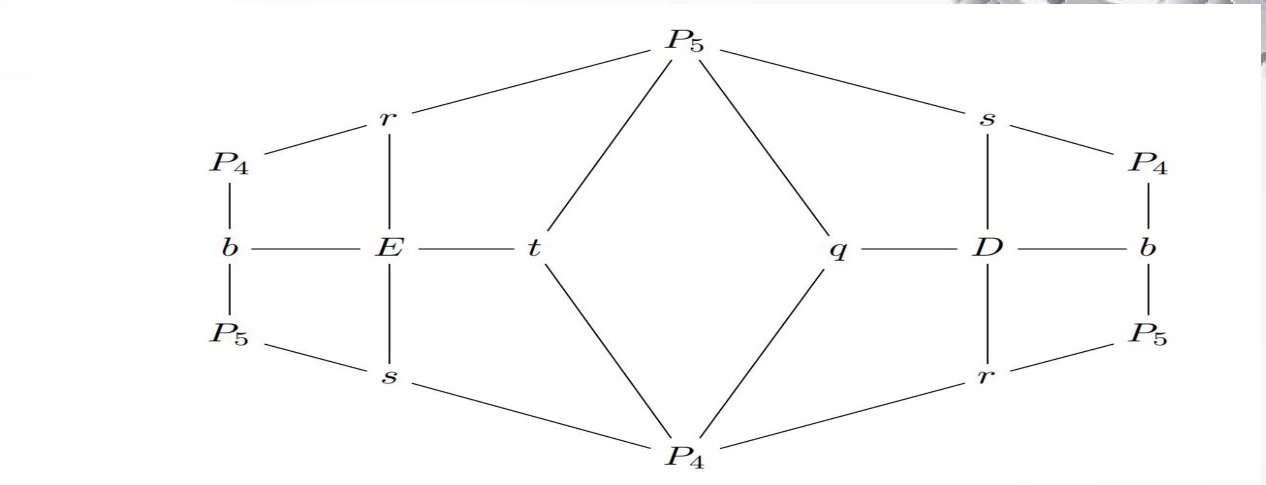


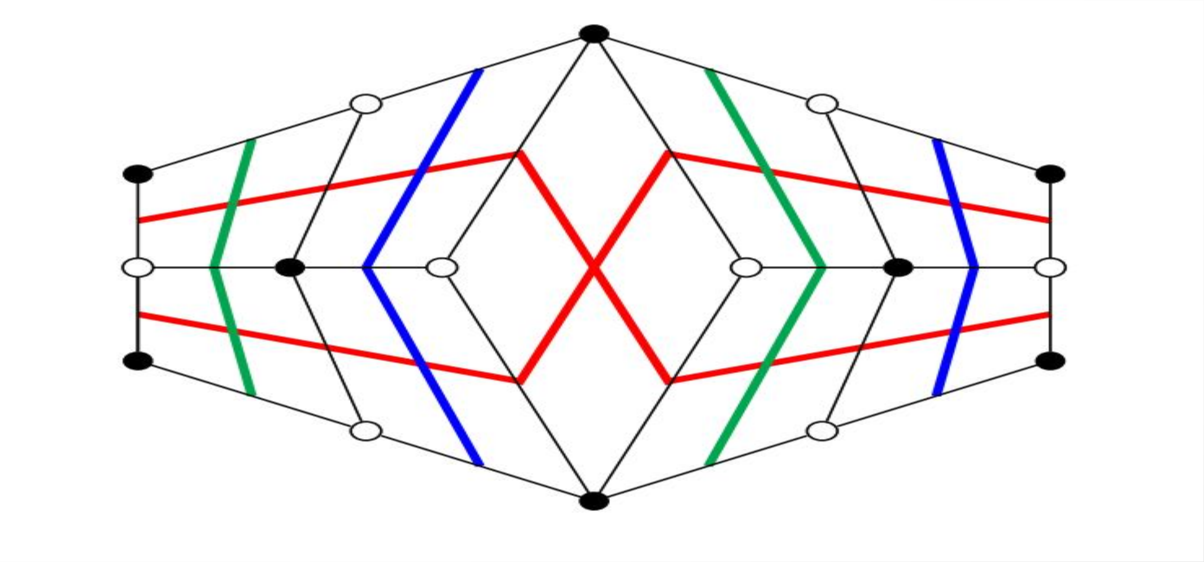
- A_1, A_2, and $b \cap c$ are collinear (given);
- A_1, B, and $a_1 \cap c$ are collinear (given);
- A_1, C, and $a_1 \cap b$ are collinear (given);
- A_2, B, and $a_2 \cap c$ are collinear (given);
- A_2, C, and $a_2 \cap b$ are collinear (given);
- B, C, and $a_1 \cap a_2$ are collinear (to be proved).



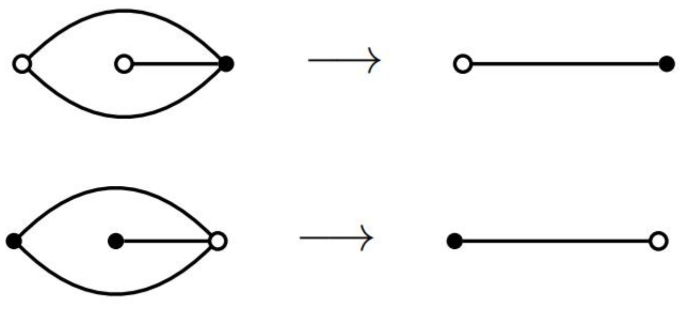
Откуда получаются косы?



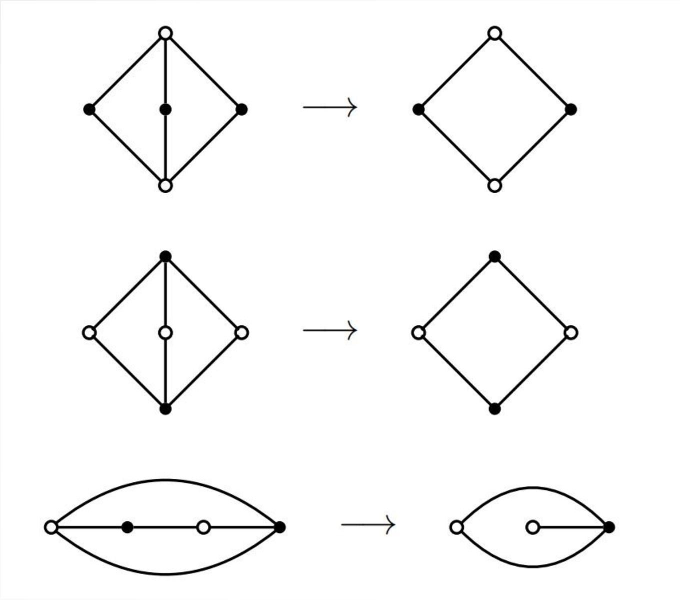




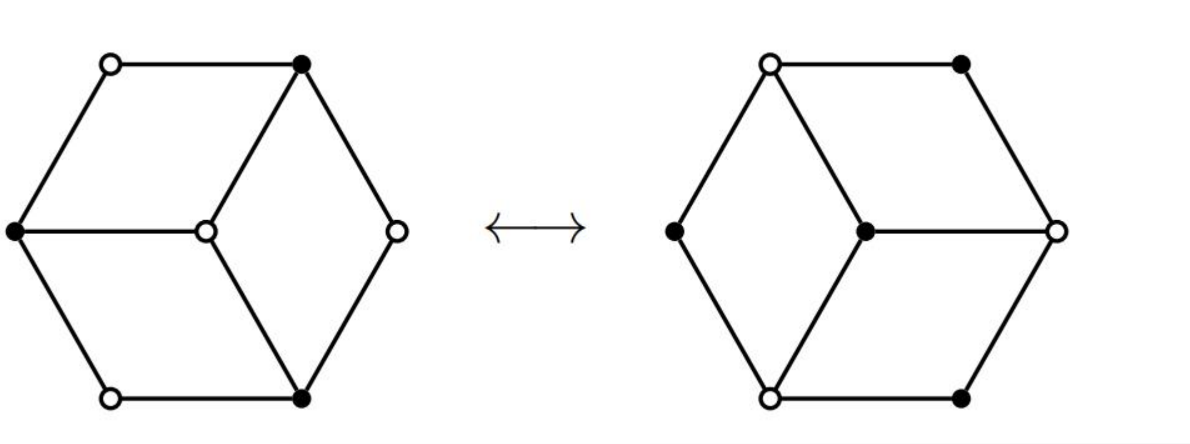
Движения на разбиениях.



Первое движение



Второе движение



Третье движение

Другие важные определения и факты

$$(A, B; \ell, m) = \frac{\langle \mathbf{A}, \boldsymbol{\ell} \rangle \langle \mathbf{B}, \mathbf{m} \rangle}{\langle \mathbf{A}, \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{B}, \boldsymbol{\ell} \rangle}.$$

смешанное перекрестное соотношение
mixed crossed-ratio

Definition 4.1. Let $n \geq 2$. Let $A_1, \ldots, A_n$ (resp., $\ell_1, \ldots, \ell_n$) be an n-tuple of points (resp., lines) on the real/complex projective plane. Assume that each point A_i does not lie on either of the lines ℓ_i and ℓ_{i-1} (with the indexing understood modulo n). Consider a topological disk $\mathbf{P}$ with $2n$ marked points on the boundary, labeled by $A_1, \ell_1, \ldots, A_n, \ell_n$, in this order. (See Figure 27.) We call the $2n$-gon $\mathbf{P}$ *coherent* if the associated "generalized mixed cross ratio" $(A_1, \ldots, A_n; \ell_1, \ldots, \ell_n)$ is equal to 1:

$$(4.1) \qquad (A_1, \ldots, A_n; \ell_1, \ldots, \ell_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle \mathbf{A_1}, \boldsymbol{\ell_1} \rangle \langle \mathbf{A_2}, \boldsymbol{\ell_2} \rangle \cdots \langle \mathbf{A_n}, \boldsymbol{\ell_n} \rangle}{\langle \mathbf{A_2}, \boldsymbol{\ell_1} \rangle \langle \mathbf{A_3}, \boldsymbol{\ell_2} \rangle \cdots \langle \mathbf{A_1}, \boldsymbol{\ell_n} \rangle} = 1,$$

Упрощенная гипотеза

Если мы будем допускать только первые два движения, то для любой совокупности кривых A существует только одна минимальная (с точки зрения движений) совокупность кривых B, в которую можно попасть (с помощью движений) из A.

Соответственно есть эта совокупность B будет минимальна и по количеству пересечений кривых.

Лемма о диаманте

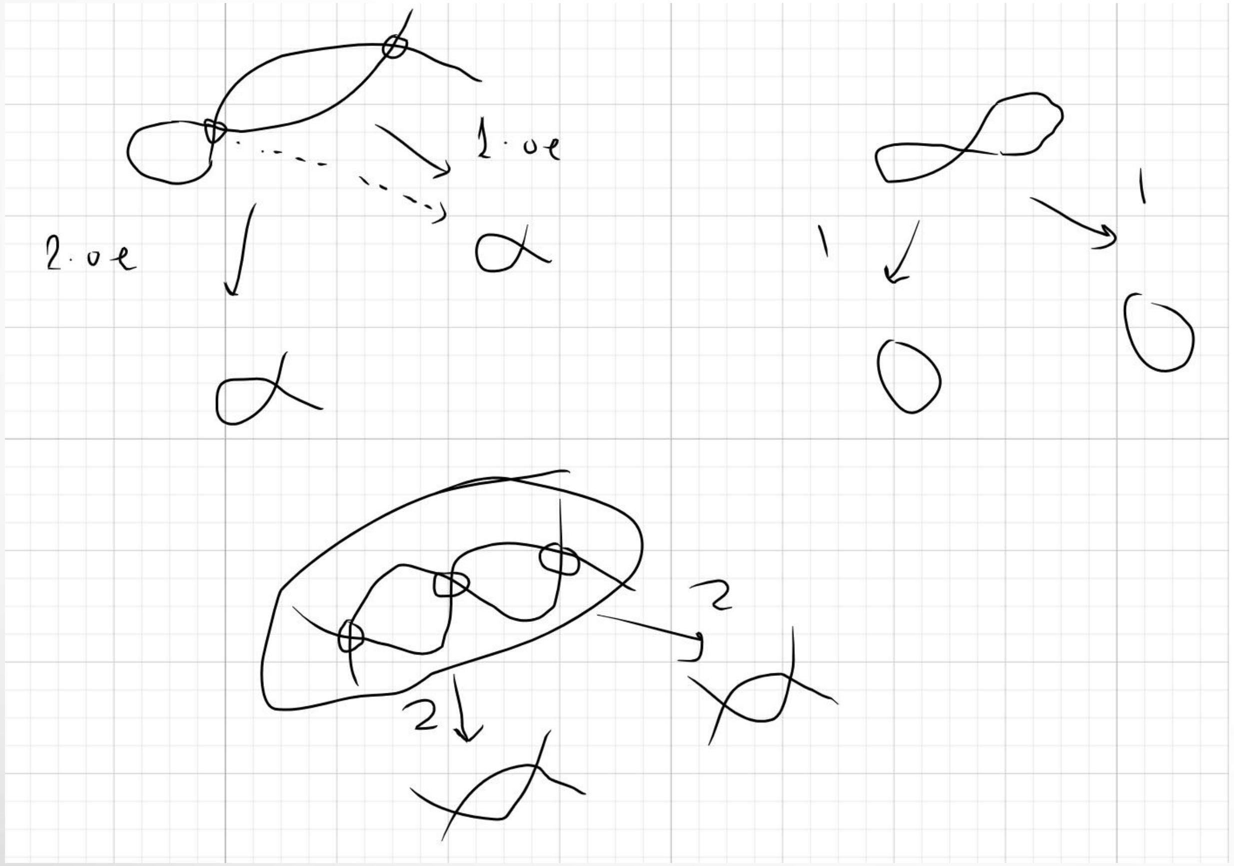
Дан бесконечный ориентированный граф без ориентированных циклов и бесконечных путей.

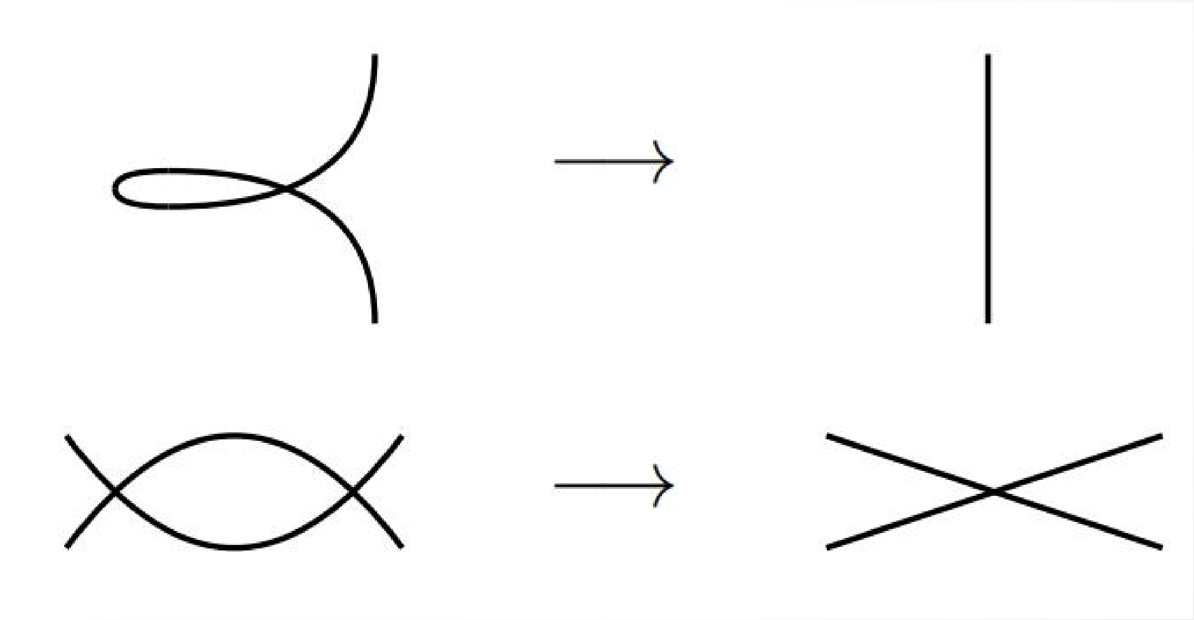
Известно, что если из вершины a ведут ребра в вершины b и c, то существует вершина d, достижимая и из b, и из c.

Тогда для любой вершины графа найдется единственная достижимая вершина с нулевой исходящей степенью.

Доказательство утверждения

- Расмотрим только первые два движения
- Оба движения уменьшают количество пересечений
- Осталось проверить только требование леммы о диаманте



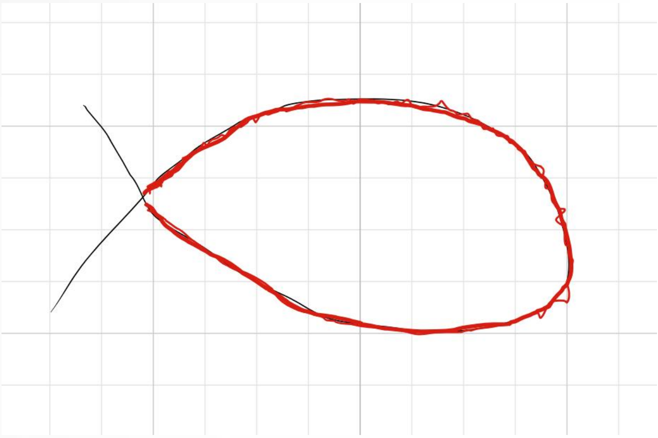


Главная гипотеза для сферы(плоскости)

Любую совокупность кривых можно перевести с помощью движений в тривиальный цикл(замкнутая кривая без пересечений).

Заметим, что если мы докажем, что пока в совокупности кривых есть пересечения, мы можем уменьшать их количесвто, то, очевидно, что мы можем прийти к совокупности из непересекающихся тривиальных циклов. Но т.к. у нас только первые два движения меняют количество узлов, значит, в конце у нас получится просто обычный тривиальный цикл.

Доказательство главной гипотезы для (сферы)плоскоски



Опр. Хорошая петля - петля, у которой красная часть кривой не самопересекается.

Утв. Если в совокупности кривых есть самопересечение, то есть и хорошая петля.

Рассмотрим самопересечение с минимальной длиной красной кривой. Тогда если красная кривая самопересекается, то это самопересечение имеет меньше длину.

Главная идея доказательства

Идея:

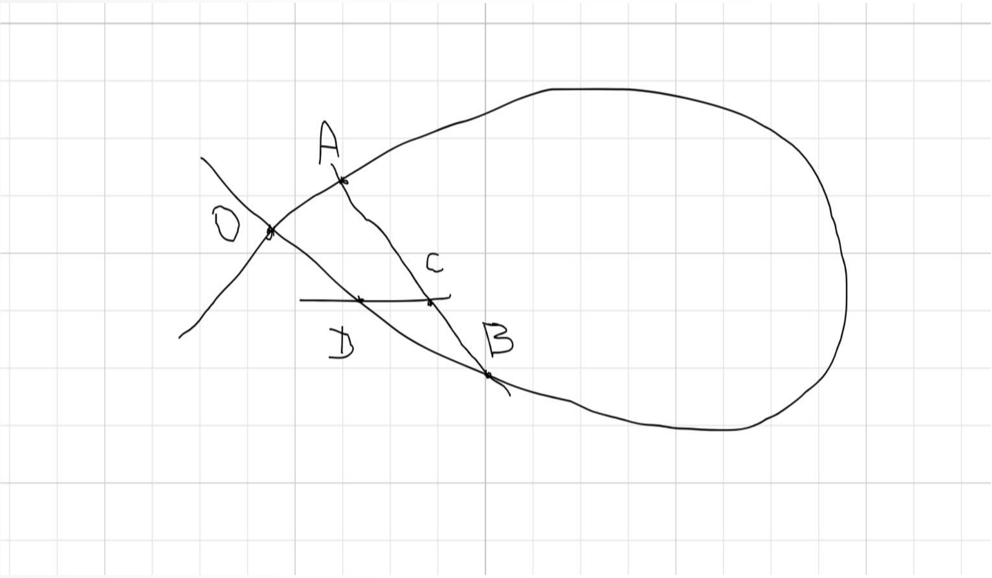
Если в совокупности кривых есть самопересечение, то рассмотрим хорошую петлю с минимальной площадью и попробуем «удалить» ее точку пересечения(используя 1 движение).

Утв.

Заметим, что тогда внутри этой хорошей петли самопересечений не будет.

Если есть самопересечение, то у него есть хорошее петля, которая будет лежать в изначальной хорошей петле.

Уменьшение количества точек пересечения в хорошей петле.



Петля с точкой O - наша хоршая петля.
A - ближайшая точка пересечения для O(в какую-то сторону). C - для B(на соответствующей кривой).
Аналогично найдем для D и т.д.

Идея:

Если в треугольнике типа CBD не будет кривых,то его можно будет решить с помощью третьего движения.

В какой-то момент, очевидно, мы получим такой треугольник, т.к. площадь у треугольников уменьшается.

А значит, мы сможем разрешить и треугольник OAB, т.е. уменьшить количество точек внутри хорошей петли.

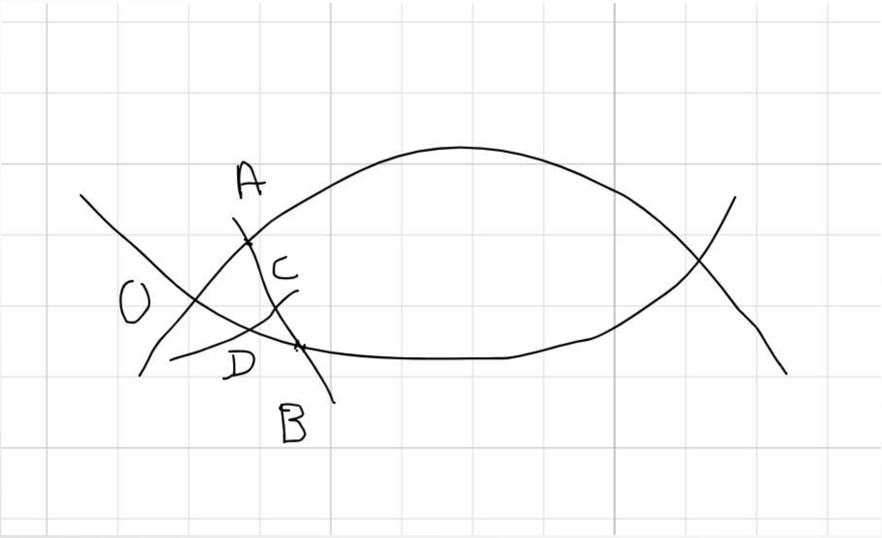
В процессе изменения треугольников внутри петли с помощью 3 движения количество точек в петле не увеличивается.

Разрешение пересечений разных кривых

Мы избавились от самопересечений в нашей совокупности кривых.

Теперь мы хотим «избавится» отобычных пересечений.

Не трудно понять, что делается это аналогично:



Ссылка на основную статью Фомина-Пылянского: https://www.arxiv.org/abs/2305.07728

Другие ссылки:

- статья В.О. Мантурова «Braids act on configurations of lines»
- статья В.О. Мантурова «Invariants and Pictures»