

Аналог движения Маркова для плоских виртуальных узлов в полнотории

Попова Дарья

под руководством В.О. Мантурова

21 мая 2024

- 1 Введение в тему, мотивация
- 2 Исходное состояние исследований по этой теме
- 3 Постановка задачи, описание методов исследований / принципов доказательств, основная идея работы
- 4 Формулировки основных результатов
- 5 Список литературы

- 1 Введение в тему, мотивация
- 2 Исходное состояние исследований по этой теме
- 3 Постановка задачи, описание методов исследований / принципов доказательств, основная идея работы
- 4 Формулировки основных результатов
- 5 Список литературы

Инварианты узлов и зацеплений

Определение

Зацепление — вложение $f : S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \rightarrow S^3$. Узел — 1-компонентное зацепление.

Определение

Диаграмма зацепления — 4-валентный оснащённый плоский граф, каждая вершина которого имеет структуру "проход-переход".
Проекция изотопных зацеплений на плоскость дают диаграммы отличающиеся движениями Рейдемайстера и наоборот:

$$\begin{array}{c|c|c} \text{Diagram 1} & \text{Diagram 2} & \text{Diagram 3} \\ \hline \text{Diagram 1} & \text{Diagram 2} & \text{Diagram 3} \end{array}$$

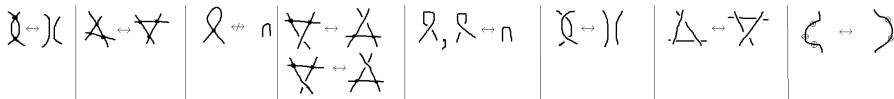
Определение

Инвариант зацепления — функция на классах эквивалентности диаграмм зацеплений

Обобщения классических диаграмм, их инвариантов и их применение

Определение

Flat virtual link — класс эквивалентности 4-валентных оснащённых диаграмм с 3-мя типами перекрёстков по следующим движениям:



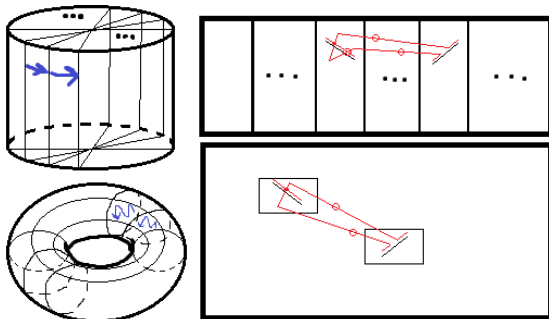
Если f — инвариант flat virtual зацеплений, а φ — отображение из классических зацеплений в flat virtual, переводящие эквивалентные узлы в эквивалентные, то $f \circ \varphi$ — инвариант классических зацеплений.

- 1 Введение в тему, мотивация
- 2 Исходное состояние исследований по этой теме
- 3 Постановка задачи, описание методов исследований / принципов доказательств, основная идея работы
- 4 Формулировки основных результатов
- 5 Список литературы

Отображения классических диаграмм в утолщённом цилиндре или торе

Теорема (Manturov, Nikonov)

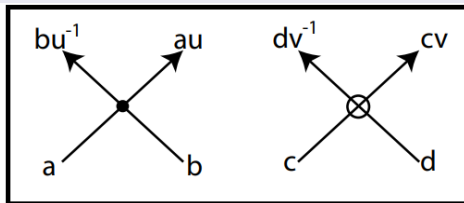
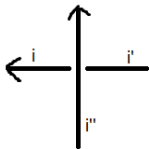
Если K и K' — изотопные диаграммы на цилиндре(торе), то $\varphi_d(K) \sim \varphi_d(K')$ ($\varphi'_l(K) \sim \varphi'_l(K')$ соответственно), где $\sim$ обозначает эквивалентность плоских виртуальных зацеплений.



Плоско-виртуальный аналог полинома Александера

Определение

Определим для ориентированной плоско-виртуальной диаграммы K функцию $\Delta(K)$ как определитель матрицы, строки которой соответствуют классическим перекрёсткам, а ненулевые элементы в них такие: $a_{i,i} = -1$, $a_{i,i'} = l' t^{w(i)}$, $a_{i,i''} = l''(1 - t^{w(i)})$, где:



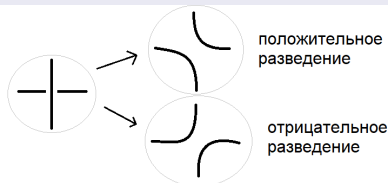
Теорема (Manturov, Nikonov)

$\Delta(K)$ - инвариант flat virtual links с точностью до умножения на $+ - t^a v^b u^c$.

Плоско-виртуальный полином Джонса

Определение

Определим для ориентированной плоско-виртуальной диаграммы $J_f(K) = (-a)^{-3\omega(K)} \sum_s (a^{\alpha(s)-\beta(s)} K_s)$, где $\omega(K)$ — число закрученности диаграммы, s — разведение классических перекрёстков диаграммы с $\alpha(s)$ положительными и $\beta(s)$ отрицательными разведениями, K_s — класс эквивалентности получившейся после разведения диаграммы. Кроме того требуется свойство (*): $K \sqcup \bigcirc = (-a^2 - a^{-2})K$



Теорема (Manturov, Nikonov)

Полином Джонса — инвариант flat virtual links

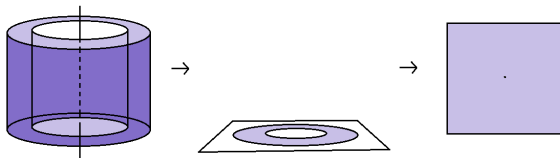
- 1 Введение в тему, мотивация
- 2 Исходное состояние исследований по этой теме
- 3 Постановка задачи, описание методов исследований / принципов доказательств, основная идея работы
- 4 Формулировки основных результатов
- 5 Список литературы

Постановка задачи

На основе имеющихся инвариантов плоско-виртуальных диаграмм и отображения из классических диаграмм в утолщённом цилиндре построить инвариант зацеплений, отображая каким-либо образом их в узлы в утолщённом цилиндре (полнотории).

Описание методов

1. Рассматривать вложение полнотория в S^3 , образ которого содержит образ зацепления.
2. Использовать биекцию между зацеплениями в утолщённом цилиндре и классами эквивалентности диаграмм по движениям Рейдемайстера в плоскости без точки:

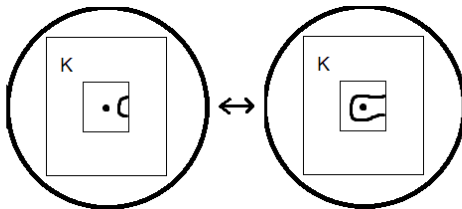


3. Два пути:

- а) Строить инвариант, одинаковый для всех проекций зацепления на поверхность цилиндра.
- б) Строить для каждого зацепления своё вложение утолщённого цилиндра в S^3 , образ которого содержит образ зацепления.

Описание работы

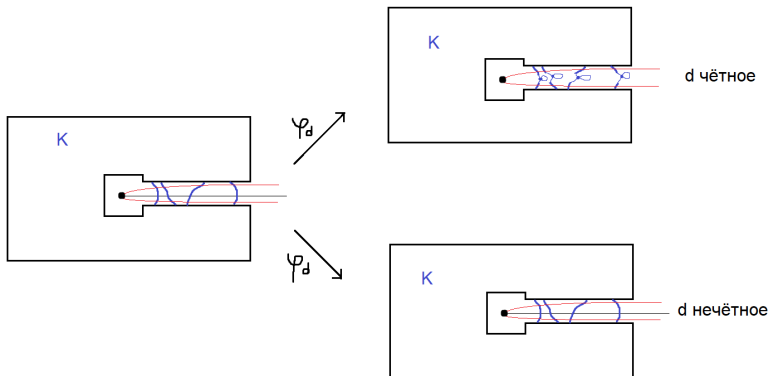
1. Поиск простого способа построения плоско-виртуальной диаграммы $\varphi_d(K)$ по классической диаграмме K в плоскости без точки.
2. Вычисление плоско-виртуального полинома Александера и плоско-виртуального полинома Джонса от $\varphi(K)$ для классической диаграммы K в плоскости без точки.
3. Попытки устранения различий в значениях этих инвариантов для диаграмм K и K' , отличающихся проносом выколотой точки через ребро диаграммы:



Описание работы: 1

Утверждение

Для любой классической диаграммы K в плоскости без точки и любого луча выходящего из этой точки плоско-виртуальная диаграмма $\varphi_d(K)$ выглядит так в зависимости от чётности d .



Описание работы: 2

Утверждение

Для любого d $\Delta(\phi_d(K)) \equiv 0$.

Лемма

Для чётного d и двух классических диаграмм K и K' , отличающихся проносом ребра через выколотую точку, каждая пара слагаемых полинома J_f для одного и того же состояния отличается заменой тривиальной компоненты (множителя $(-a^2 - a^{-2})$) на компоненту "плоская восьмёрка".



Диаграмма "плоская восьмёрка"

- 1 Введение в тему, мотивация
- 2 Исходное состояние исследований по этой теме
- 3 Постановка задачи, описание методов исследований / принципов доказательств, основная идея работы
- 4 Формулировки основных результатов**
- 5 Список литературы

Формулировки основных результатов

Инвариант 1 (общий случай)

Для любого нечётного натурального d , инварианта f плоско-виртуальных диаграмм и отображения с убираания тривиального (в S^3) узла из дополнения к данному классическому зацеплению $f \circ \phi_d \circ c$ — инвариант классических узлов.

Инвариант 2 (полином Джонса)

Для нечётного d $(J_f \circ \varphi_d \circ c)(K) = J(K)$.

Добавив к определению J_f условие $K \sqcup EIGHT = (-a^2 - a^{-2})K$, где $EIGHT$ — компонента "плоская восьмёрка" (обозначим полином J'_f), получим инвариант $J'_f \circ \varphi_d \circ c$ классических зацеплений, также тождественно равный $J(K)$.

- 1 Введение в тему, мотивация
- 2 Исходное состояние исследований по этой теме
- 3 Постановка задачи, описание методов исследований / принципов доказательств, основная идея работы
- 4 Формулировки основных результатов
- 5 **Список литературы**

- [1] V.O.Manturov, D.P.Ilyutko, Virtual Knots: The State of the Art, World Scientific, 2012.
- [2] V.O.Manturov, I.M.Nikonov, Maps from knots in the cylinder to flat-virtual knots, arxiv:2210:09689.
- [3] V.O.Manturov, I.M.Nikonov, Flat-virtual knot: introduction and some invariants.
- [4] J.S.Birman, W.W.Menasco, Stabilization in the braid groups I: MTWS, Geometry and Topology 10 (2006) 413–540.