Разрезание центрально-симметричного многоугольника на две конгруэнтные части

Садовничий Антон (МФТИ)
Научный руководитель:
Канель-Белов Алексей Яковлевич (МФТИ)
kanel@mccme.ru

21 мая 2024 г.

Содержание

Формулировка

Задачи о разбиении и декомпозиции многоугольников и других фигур на части многочисленны и хорошо изучены в комбинаторной геометрии.
Однако, в данной работе ставится вопрос с очень простой формулировкой, который показывает, что даже про самый простй случае разбиения фигуры на две равные части далеко не всё известно.

Гипотеза

Выпуклую ограниченную центрально-симметричную фигуру в $\mathbb{R}^n$ разбили на две конгруэнтые части. Верно ли, что центр симметрии обязательно лежит на общей границе двух частей?

Вопрос: верно ли, что все условия являются необходимыми? Да, в частности ниже приведен контрпример для невыпуклой фигуры.

Контрпример

Разбиение центрально-симметричного невыпуклого многоугольника на две части, не удовлетворяющее изначальной формулировке.

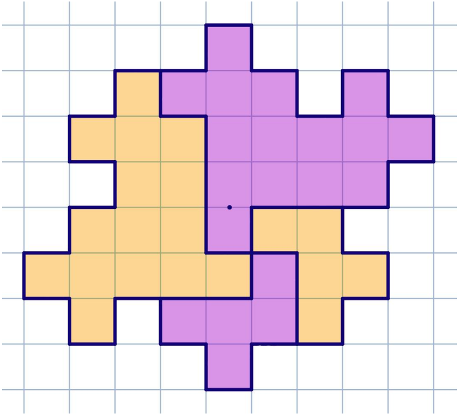

Рис. 1: Авторы: Максим Бидва, Юрий Маркелов

Теорема 1

В работе в основном рассматривается случай плоских фигур.

Теорема 1

Если две части, на которые разбита фигура, переводятся друг в друга движением, не являющимся поворотом, то утверждение в изначальной формулировке верно.

Доказательство (автор: Максим Бидва)

Доказательство использует теорему Шаля о классификации движений, согласно которой все движения плоскости относятся к одному из следующих типов:

- Осевая симметрия
- Скользящая симметрия
- Параллельный перенос
- Поворот

Основной результат

Теорема 2

Центрально-симметричная фигура, граница которой является простой (несамопересекающейся) кусочно-гладкой кривой, разбита (несамопересекающейся) кусочно-гладкой кривой на две связные конгруэнтные части. Тогда центр симметрии фигуры лежит на кривой разбиения.

Доказательство теоремы вдохновлено и опирается на следующую лемму (назовем части разбиения А и Б):

Лемма[1]

Существует общий участок границы фигуры и части А, который при повороте переходит в общий участок границы фигуры и части Б.

[1] Lemma 2 из Eriksson, K. (1996). Splitting a Polygon into Two Congruent Pieces. The American Mathematical Monthly, 103(5), 393–400. https://doi.org/10.2307/2974930

Иллюстрация к Лемме

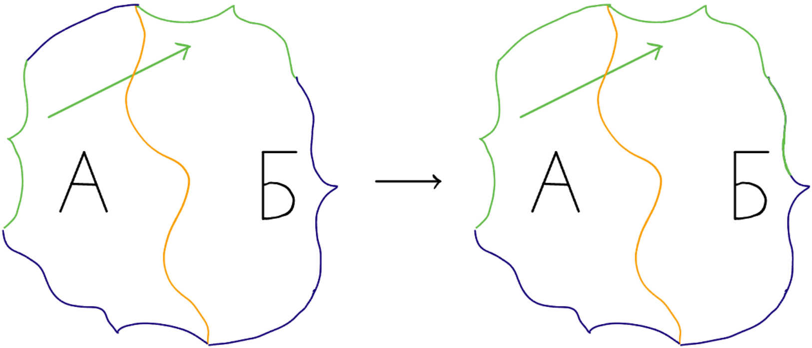

Рис. 2: Участок границы из Леммы отмечен зеленым цветом

В доказательстве проводится разбор случаев взаимного расположения кривой образа разбиения и её образа.

Результаты

Гипотеза в работе рассматривалась в основном в плоском случае. Удалось доказать гипотезу для:

1. Всех типов движений, кроме поворота.
2. Частного случая устройства разбиения фигуры.

Также, для общего случая разбиения проанализированы свойства поворота, совмещающего части. Показано, что центр поворота лежит внутри фигуры, а также что угол поворота — рациональное число. К сожалению, вопрос, верна ли гипотеза даже в плоском случае остается открытым. Есть основания предполагать, что может существовать нетривиальный контрпример. В частности, работа[2] показывает, что разбиения многоугольника на части могут выглядеть исключительно сложно.

Спасибо за внимание!

[2] Mathe, A. et al. (2022). Circle Squaring with Pieces of Small Boundary and Low Borel Complexity. https://doi.org/10.48550/arXiv.2202.01412