УДК 514.17

Задача о разрезании центрально-симметричной фигуры на две конгруэнтные части

А. Ю. Садовничий, А. Я. Канель-Белов

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

В работе рассматривается вариация на классические задачи комбинаторной геометрии о разбиении фигуры на конгруэнтные части. Рассматривается

Гипотеза. Выпуклая ограниченная центрально-симметричная фигура в $\mathbb{R}^n$ разбита на две конгруэнтные части. Тогда центр симметрии фигуры обязательно лежит на общей границе двух частей.

Показано, что выпуклость и ограниченность являются необходимыми условиями. В частности, предъявлено разбиение клетчатого центрально-симметричного многоугольника на две равные части, такое что центр симметрии многоугольника лежит целиком внутри одной из частей.

В работе в основном рассматривается случай плоских фигур. Доказаны две теоремы.

Теорема 1. Если две части, на которые разбита фигура, переводятся друг в друга движением, не являющимся поворотом, то гипотеза верна (отметим, даже для невыпуклой фигуры).

Теорема 2. Центрально-симметричная фигура, граница которой является простой (несамопересекающейся) кусочно-гладкой кривой, разбита несамопересекающейся кусочно-гладкой кривой на две связные конгруэнтные части. Тогда центр симметрии фигуры лежит на кривой разбиения.

Более того, в Теореме 2 кусочная гладкость границ не является необходимым условием. Достаточно «хорошей» в некотором смысле границы, например непрерывной и имеющей ограниченную вариацию.

Теорема 1 доказывается с использованием известной Теоремы Шаля о классификации движений на плоскости и последующим перебором разных типов движений.

Теорема 2 опирается на Lemma 2 из [1]. Рассматриваются все возможные случаи взаимного расположения кривой разбиения и её образа при повороте, совмещающим первую часть разбиения со второй. Для каждого из них доказательство сводится к стандартным геометрическим рассуждениям.

Для общего случая разбиения выпуклой фигуры на плоскости (для наглядности, выпуклого многоугольника) анализируются свойства поворота, совмещающего части разбиения. В частности, показывается, что центр поворота лежит строго внутри фигуры, а угол поворота является рациональным числом.

Список литературы

[1] Kimmo Eriksson. Splitting a polygon into two congruent pieces. *The American Mathematical Monthly*, 103(5):393–400, 1996.