Оптимизация Математической Модели Расширения Производства

Гасеев Арсений, Жукова Александра, Флерова Анна

21 Мая 2024

Кафедра - ММССиО ВЦ РАН

Актуальность

Прибыль является одним из ключевых показателей эффективности деятельности компании и каждой компании необходимо распределять ресурсы таким образом, чтобы получить максимально возможную прибыль.

Постановка Задачи(1)

Пусть:

- x_t - доход t-го месяца.
- u_t - процент дохода t-го месяца, идущий на расширение производства(параметр управления).
- $\alpha > 0$ - коэффициент, характеризующий вклад инвестиций в расширение.
- $\mu = 1 - \beta$, где β - коэффициент пропорциональности прибыли и вкладываемых денег в производство.
- x_0 - стартовый капитал.

Постановка Задачи(1)

Тогда наша задача имеет вид:

$$\sum_{t=0}^{T-1} (\mu - u_t)x_t \to max$$

$$s.t. x_{t+1} = x_t + \alpha u_t x_t$$

$$x(0) = x_0 > 0$$

$$0 \leq u_t \leq \mu$$

Аналитическое решение задачи(1)

Необходимые условия в форме уравнения Беллмана для целевой функции S_t:
$S_t(x_t) = \max_{\{0 \leq u \leq \mu\}}((\mu - u_t)x_t + S_{t+1}(x_{t+1}))$
s.t. $S_T(x_T) = 0$
С помощью метода динамического программирования, двигаясь с конца в начало, было получено решение:

Аналитическое решение задачи(1)

$$u_t^{opt} = \begin{cases} \mu, & \text{если } (T - t - 1)\mu\alpha - 1 > 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1}$$

Сведение к задаче линейного программирования

Пусть $u_t = v_t / x_t$, тогда наша задача примет вид:

$$T\mu x_0 + \sum_{t=0}^{T-1} (\mu\alpha(T-1-t)-1)v_t \to max$$

$$s.t. v_t \geq 0$$

$$v_t - \alpha\mu \sum_{i=0}^{t-1} v_i \leq \mu x_0$$

$$v_0 \leq \mu x_0$$

Симплекс-метод

Применение симплекс-метода для нашей задачи с помощью библиотеки PuLP

```python
from pulp import LpMaximize, LpProblem, LpStatus, lpSum, LpVariable
import numpy as np

#Вводим T, mu, alpha, x0
T = int(input())
mu = float(input())
alpha = float(input())
s = float(input())

#Создаем нашу модель
model = LpProblem(name="simplex_test", sense=LpMaximize)
v = {i: LpVariable(name=f"v{i}", lowBound=0) for i in range(0, T)}
model += (v[0] <= s * mu)
model += (v[0] >= 0)
for i in range(1, T):
  model += (v[i] >= 0)
  model += ((v[i] - alpha * mu * lpSum(v[j] for j in range(0, i)) <= s * mu))
model += T * mu * s + lpSum(((mu * alpha * (T-1-i) - 1) * v[i]) for i in range(0, T))

#Вызываем COIN-OR Linear Programming Solver (CLP), который использует симплекс метод
status = model.solve()

#Выводим результаты
print(f"status: {model.status}, {LpStatus[model.status]}")
print(f"objective: {model.objective.value()}")
for var in v.values():
    print(f"{var.name}: {var.value()}")
```

Симплекс-метод

Результаты работы симплекс-метода:

T	μ	α	x_0	Analytic sol	Simplex sol
10	0.3	0.9	5	25.175237482	25.175237482
10	1	0.5	5	256.2890625	256.2890625
8	0.4	0.8	5	24.28766208	24.28766208
8	0.9	0.7	4	135.03866027	135.03866027
7	0.9	0.8	4	108.38638508	108.38638508
7	1	0.2	4	28.8	28.8
3	1	0.2	4	12.0	12.0
8	0,314	0.276	6,02	15.12224	15.12224

Градиентный спуск

Понижение размерности задачи и формула производной:

$$\sum_{t=0}^{T-1}(\mu - u_t)x_t = \sum_{t=0}^{T-1}(\mu - u_t)x_0\prod_{i=0}^{t-1}(1+\alpha u_i) \rightarrow max$$

$$s.t. 0 \leq u_t \leq \mu$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = x_0\mu\sum_{t=i+1}^{T-1}\prod_{k=0}^{i-1}(1+\alpha u_k)\prod_{j=i+1}^{t-1}(1+\alpha u_j) -$$

$$-x_0\sum_{t=i}^{T-1}[\prod_{j=0}^{t-1}(1+\alpha u_j) - u_i\prod_{k=0}^{i-1}(1+\alpha u_k)\prod_{p=i+1}^{t-1}(1+\alpha u_p)]$$

Градиентный спуск

Результаты работы градиентного спуска:

T	μ	α	x_0	Analytic sol	Gradient sol
10	0.3	0.9	5	25.175237482	15.0
10	1	0.5	5	256.2890625	50.254
8	0.4	0.8	5	24.28766208	16.0
8	0.9	0.7	4	135.03866027	28.80004
7	0.9	0.8	4	108.38638508	25.20003
7	1	0.2	4	28.8	28.0
3	1	0.2	4	12.0	12.0
8	0,314	0.276	6,02	15.12224	15.12224

Постановка Задачи с Венчурным Инвестированием

Внешние вложения могут быть суммой, полученной на начальном этапе проекта, которая должна быть выплачена в полном объеме до конца периода планирования проекта. Управляющий проектом может выбирать в каждый момент времени, какую долю прибыли y_t тратить на выплату долга. При планировании он учитывает, что собственники фирмы дисконтируют будущие доходы (параметр дисконтирования δ).

Постановка Задачи с Венчурным Инвестированием

$$\sum_{t=0}^{T}(\mu - u_t)x_t(1 - y_t)e^{-\delta t} \to max$$

$$s.t. x_{t+1} = x_t + \alpha u_t x_t$$

$$x(0) = x_0 + A$$

$$0 \leq u_t \leq \mu$$

$$0 \leq y_t \leq 1$$

$$\sum_{t=0}^{T}(\mu - u_t)x_t y_t \geq A$$

Постановка Задачи в Непрерывном Виде

$$\int_0^T (\mu - u(t))x(t)(1 - y(t))e^{-\delta t}\, dt \to max$$

$$\dot{x}(t) = \alpha u(t)x(t)$$

$$0 \le u(t) \le \mu$$

$$0 \le y(t) \le 1$$

$$x(0) = x_0 + A$$

$$\int_0^T (\mu - u(t))x(t)y(t)\, dt \ge A$$

Аналитическое Решение Непрерывной Задачи с Венчурным Инвестированием

Решение задачи в непрерывном виде с помощью принципа максимума Понтрягина:

$$u_t^{opt} = \begin{cases} 1-\mu, & \text{если } t \le \tau \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2}$$

$$y_t^{opt} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta \le \text{t} \le T \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3}$$

Аналитическое Решение Непрерывной Задачи с Венчурным Инвестированием

Параметры управления определяются из решения системы уравнений:

$$\frac{\mu e^{-\delta\tau}}{\delta} - e^{-\delta\theta}\mu\theta + e^{-\delta\theta}\mu T - \frac{\mu e^{-\delta\theta}}{\delta} = \frac{e^{-\delta\tau}}{\alpha}$$

$$\mu(x_0 + A)e^{\alpha\mu\tau}(T - \theta) = A$$

Сведение к задаче линейного программирования

Пусть $u_t = v_t / x_t$ и $c_t = (1 - y_t)(\mu x_t - v_t)$. Тогда

$$\sum_{t=0}^{T} c_t e^{-\delta t} \to max$$

$$s.t. v_t \geq 0, c_t \geq 0$$

$$v_t - \alpha\mu \sum_{i=0}^{t-1} v_i \leq \mu(x_0 + A)$$

$$c_t + v_t - \alpha\mu \sum_{i=0}^{t-1} v_i \leq \mu(x_0 + A)$$

$$(T+1)\mu(x_0 + A) + \sum_{t=0}^{T} [-c_t + ((T - i)\alpha\mu - 1)v_t] \geq A$$

Симплекс-метод

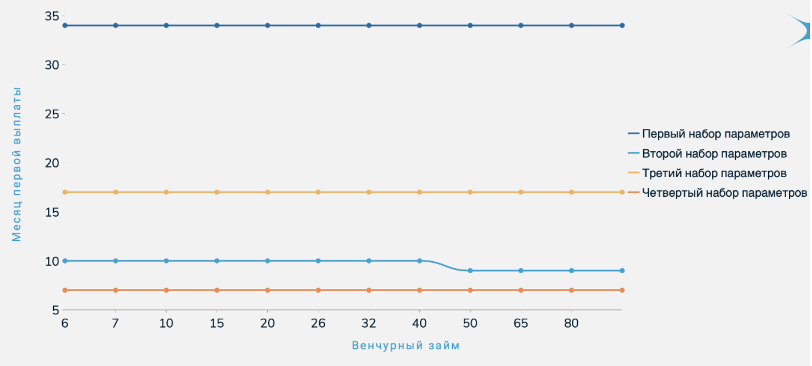
Результаты работы симплекс-метода на задаче с венчурным инвестированием:

T	μ	α	x_0	A	δ	«Analytic» sol	Simplex sol
10	0.9	0.9	5	8	1	11.7	18.5
40	0.9	0.9	3	20	1	20.7	32.74691647
40	0.9	0.9	20	3	1	0	32.74691647
50	0.4	1.0	6	6	0.5	0	12.1991
8	0.9	0.7	4	12	0.3	?	101.1284
30	0.7	0.8	20	50	0.6	75.8918	108.602
7	1	0.2	4	11	0.7	0	29.60441

Результаты сравнения

- При $x_0 \geq A$ аналитическое решение непрерывного случая возвращает ноль.
- При некоторых параметрах отсутсвует "аналитическое"решение, но есть решение симплекс-методом.
- Есть примеры, когда расширение производства происходит между выплатами венчурным инвесторам, при непрерывном случае такого не наблюдалось.

Зависимость даты начала венчурной выплаты от привлеченных средств



Список Литературы

Application of Machine Learning in the producer's optimal control problem with non-stable demand (Authors: Aleksandr Delev, Aleksandra Zhukova, Anna Flerova)
https://ieeexplore.ieee.org/document/9803997