УДК 517.977

Оптимизация математической модели расширения производства

А.С. Гасеев, А.А. Жукова, А.Ю. Флерова

МФТИ

0.1 Введение

Прибыль является одним из ключевых показателей эффективности деятельности компании и каждой компании необходимо распределять ресурсы таким образом, чтобы получить максимально возможную прибыль. В этой работе наша цель посмотреть как может быть представлена данная модель и как ее можно оптимизировать с помощью различных методов.

0.2 Задача с расширением производства

Пусть:

- x_t - доход t-го месяца; u_t - процент дохода t-го месяца, идущий на расширение производства(параметр управления).
- $\alpha > 0$ - коэффициент, характеризующий вклад инвестиций в расширение; $\mu = 1 - \beta$, где β - коэффициент пропорциональности прибыли и вкладываемых денег в производство.
- x_0 - стартовый капитал.

Тогда наша задача имеет вид:

$$\sum_{t=0}^{T-1} (\mu - u_t) x_t \to max$$

$$s.t.\ x_{t+1} = x_t + \alpha u_t x_t$$

$$x(0) = x_0 > 0$$

$$0 \le u_t \le \mu$$

Для данной задачи в статье Делева А., Жуковой А., Флеровой А.([1]) было получено аналитическое решение, предполагающее наличие двух этапов производства: вкладывание всей прибыли в расширение производства и накопление прибыли собственником. Далее к задаче были применены численные методы: симплекс метод, при условии сведения задачи к задаче линейного программирования, и градиентный спуск. В итоге симплекс-метод продемонстрировал результаты, совпадающие с аналитическим решением, а градиентный метод ожидаемо показал результаты, отстающие от аналитического решения.

0.3 Задача с венчурным капиталом

Внешние вложения могут быть суммой, полученной на начальном этапе проекта, которая должна быть выплачена в полном объеме до конца периода планирования проекта. Управляющий проектом может выбирать в каждый момент времени, какую долю прибыли y_t тратить на выплату долга. При планировании он учитывает, что собственники фирмы дисконтируют будущие доходы (параметр дисконтирования δ). Тогда задача примет вид:

$$\sum_{t=0}^{T}(\mu - u_t)x_t(1-y_t)e^{-\delta t} \to max$$

$$s.t.\;\; x_{t+1} = x_t + \alpha u_t x_t,\;\; x(0) = x_0 + A$$

$$0 \le u_t \le \mu,\;\; 0 \le y_t \le 1$$

$$\sum_{t=0}^{T}(\mu - u_t)x_t y_t \ge A$$

Для аналитического решения задача была переформулирована в непрерывный вид, и с помощью условия Максимума Понтрягина получено решение, которое подразумевает наличие трех периодов: вкладывание всей прибыли в расширение производства, накопление прибыли, выплата венчурного долга. Далее задача была сведена к задаче линейного программирования(с помощью замены $u_t = v_t/x_t$ и $c_t = (1-y_t)(\mu x_t - v_t)$), и результат работы симплекс метода оказался лучше чем аналитическое решение непрерывной задачи, примененное к дискретному случаю[Рис.1].

$$\sum_{t=0}^{T} c_t e^{-\delta t} \to max$$

$$s.t.\; v_t \ge 0,\;\; c_t \ge 0$$

$$v_t - \alpha\mu\sum_{i=0}^{t-1} v_i \le \mu(x_0 + A),\;\; c_t + v_t - \alpha\mu\sum_{i=0}^{t-1} v_i \le \mu(x_0 + A)$$

$$(T+1)\mu(x_0 + A) + \sum_{t=0}^{T}[-c_t + ((T-i)\alpha\mu - 1)v_t] \ge A$$

В результате и в непрерывном и в дискретном случае был замечен интересный факт[Рис.2]: начало периода вкладывания прибыли в расширение производства и периода выплаты венчурного долга не сильно изменяется при существенном увеличении венчурного капитала.

T	μ	α	x_0	A	δ	«Analytic» sol	Simplex sol
10	0.9	0.9	5	8	1	11.7	18.5
40	0.9	0.9	3	20	1	20.7	32.74691647
40	0.9	0.9	20	3	1	0	32.74691647
50	0.4	1.0	6	6	0.5	0	12.1991
8	0.9	0.7	4	12	0.3	?	101.1284
30	0.7	0.8	20	50	0.6	75.8918	108.602
7	1	0.2	4	11	0.7	0	29.60441

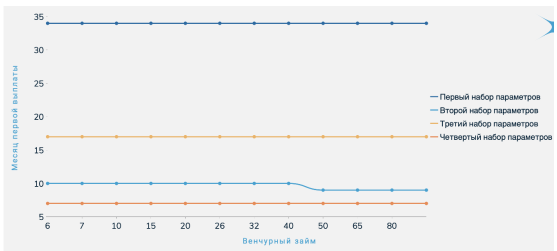

Рис. 1: Результаты работы симплекс-метода

Рис. 2: Зависимость первого месяца выплаты от Венчурного капитала

0.4 Список литературы

[1]Application of Machine Learning in the producer's optimal control problem with non-stable demand (Authors: Aleksandr Delev, Aleksandra Zhukova, Anna Flerova) https://ieeexplore.ieee.org/document/9803997