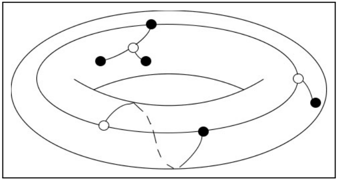
Квантовая теория детских рисунков

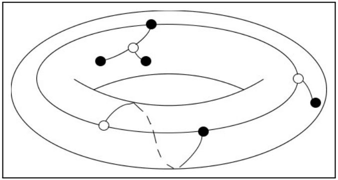
А.С. Фролов
Научный руководитель: Г.Б. Шабат

МФТИ
Инновационный практикум

Май 2024

Введение в тему: категория детских рисунков





$$\mathcal{DESS} := \left\{ \left\{ (V,E,F,C,O) \;\middle|\; \begin{array}{l} V \text{ – множество вершин} \\ E \text{ – множество ребер} \\ \coprod_{v\in V} F_v \text{ – множество флагов} \\ C : V \to \{0,1\} \text{ – раскраска в 2 цвета} \\ O_v : F_v \to \{1,\ldots,n_v\} \text{ – ориентация} \end{array} \right\} \right\}$$

Морфизмы – гомоморфизмы графов, сохраняющие раскраску и ориентацию.

Введение в тему: категории пар Белого

$$\mathcal{BELP}(\Bbbk) := \{\{(\mathbf{X}, \beta) | \beta : \mathbf{X} \to \mathbb{P}^1_{\Bbbk},\ \mathrm{CritVal}(\beta) = \{0, 1, \infty\}\}\}$$

Введение в тему: категории пар Белого

$$\mathcal{BELP}(\Bbbk) := \{\{(\mathbf{X},\beta)|\beta : \mathbf{X} \to \mathbb{P}^1_{\Bbbk},\ \mathrm{CritVal}(\beta) = \{0,1,\infty\}\}\}$$

$$\underline{\mathrm{draw}} :: \mathcal{BELP}(\mathbb{C}) \to\to \mathcal{DESS},$$

$$(\mathbf{X},\beta) \mapsto\mapsto (\beta^{-1}(0) \coprod \beta^{-1}(1) \subset \beta^{-1}([0,1]) \subset \underline{\mathrm{top}}(\mathbf{X}))$$

Теорема

Функтор $\underline{\mathrm{draw}}$ *– эквивалентность категорий.*

Введение в тему: еще 2 категории

$$\mathcal{TRIP} := \{(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_\infty) \in S_d^3 \mid \sigma_0\sigma_1\sigma_\infty = 1\}$$

$$\begin{tikzcd}
\{1,\dots,d\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma_i"] & \{1,\dots,d'\} \arrow[d, "\sigma_i'"] \\
\{1,\dots,d\} \arrow[r, "f"] & \{1,\dots,d'\}
\end{tikzcd}$$

Вспомним, что

$$\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}) \simeq \langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_\infty \mid \sigma_0\sigma_1\sigma_\infty = 1\rangle \simeq \mathbf{Free}_2$$

Теорема

$\mathcal{DESS} \simeq \mathcal{BELP}(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{TRIP} \simeq \mathbf{Free}_2\text{-}\mathcal{SETS}_{finite}$

Мотивация к изучению: теорема Белого

Теорема (Белый)

$\mathcal{BELP}(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{BELP}(\overline{\mathbb{Q}})$

Мотивация к изучению: теорема Белого

Теорема (Белый)

$\mathcal{BELP}(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{BELP}(\overline{\mathbb{Q}})$

Группа $\mathbb{\Gamma} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ действует на $\frac{\mathcal{BELP}(\overline{\mathbb{Q}})}{\simeq}$ заменой коэфициентов. Ввиду эквивлентонсти категорий $\mathcal{BELP}(\overline{\mathbb{Q}}) \simeq \mathcal{DESS}$, построили действие.

Теорема

$\mathbb{\Gamma}$ действует на $\frac{\mathcal{DESS}}{\simeq}$ эффективно (без ядра) с конечными орбитами.

Мотивация к изучению: теорема Белого

Теорема (Белый)

$\mathcal{BELP}(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{BELP}(\overline{\mathbb{Q}})$

Группа $\mathbb{\Gamma} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ действует на $\frac{\mathcal{BELP}(\overline{\mathbb{Q}})}{\simeq}$ заменой коэфициентов. Ввиду эквивлентонсти категорий $\mathcal{BELP}(\overline{\mathbb{Q}}) \simeq \mathcal{DESS}$, построили действие.

Теорема

$\mathbb{\Gamma}$ действует на $\frac{\mathcal{DESS}}{\simeq}$ эффективно (без ядра) с конечными орбитами.

Гипотеза (Обратная задача теории Галуа)

Пусть G – конечная группа. Тогда существует $K/\mathbb{Q}$ – конечное расширение, что $G \simeq \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

Постановка проблем

1) Практически не изучены категорные свойства (в частности, структуры) на категории детских рисунков

Постановка проблем

1) Практически не изучены категорные свойства (в частности, структуры) на категории детских рисунков
2) Присутсвуют явления, которые не объяснены теоретически:

Пусть детскому рисунку $\mathcal{D} \longleftrightarrow (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_\infty)$, цикленные типы этих перестановок вместе называются паспортом.
Можно поставить обратный вопрос: пусть есть 3 цикленных типа, можно ли по нему построить детский рисунок?
Ответ: не всегда.

Постановка проблем

1) Практически не изучены категорные свойства (в частности, структуры) на категории детских рисунков
2) Присутсвуют явления, которые не объяснены теоретически:

Пусть детскому рисунку $\mathcal{D} \longleftrightarrow (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_\infty)$, цикленные типы этих перестановок вместе называются паспортом.
Можно поставить обратный вопрос: пусть есть 3 цикленных типа, можно ли по нему построить детский рисунок?
Ответ: не всегда.

Множество детских рисунков с фиксированным паспортом наызвается комбинаторной орбитой. Обозначим ее за $\mathrm{Comb}(\mathcal{D})$. Всегда:
$\mathbb{\Gamma} \cdot \mathcal{D} \subset \mathrm{Comb}(\mathcal{D})$. Не равенство ли?
Ответ: не всегда, иногда комбинаторные орбиты распадаются на несколько орбит Галуа.

Наше решение: квантование категорий

Пусть $q = p^n$, обозначим $\dddot{\mathbb{P}}^1 := \mathbb{P}^1 \backslash \{0, 1, \infty\}$

$$\mathcal{BELP}(\mathbb{C}) \rightsquigarrow q\text{-}\mathcal{BELS}(\mathbb{C}) := \{\{\mathcal{F} \in\in \mathcal{SH}_{\mathbb{F}_q}(\dddot{\mathbb{P}}^1) \mid \mathcal{F} \text{ лок. постоянный}\}\}$$

$$\mathcal{TRIP} \rightsquigarrow q\text{-}\mathcal{TRIP} := \{\{(g_0, g_1, g_\infty) \in \mathrm{GL}(V) \mid g_0 g_1 g_\infty = 1\}\}$$

$$\mathbf{Free}_2\text{-}\mathcal{SETS}_{fin} \rightsquigarrow \mathbf{Free}_2\text{-}\mathcal{REP}_{fin.dim}(\mathbb{F}_q)$$

Теорема

$$q\text{-}\mathcal{BELS}(\mathbb{C}) \simeq q\text{-}\mathcal{TRIP} \simeq \mathbf{Free}_2\text{-}\mathcal{REP}_{fin.dim}(\mathbb{F}_q)$$

$$\underline{\mathrm{Forget}} :: q\text{-}\mathcal{BELS}(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow \mathcal{BELP}(\mathbb{C})$$

Квантовый аналог теоремы Белого

Будем говорить, что пучок $\mathcal{F}$ на $\dddot{P}^1_{\mathbb{C}}$ определен над $\overline{\mathbb{Q}}$, если $\text{Ét}(\mathcal{F}) \simeq X \times_{\overline{\mathbb{Q}}} \operatorname{Spec}(\mathbb{C})$, где X определена над $\overline{\mathbb{Q}}$. Обозначим категорию q-пучков Белого, определенных над $\overline{\mathbb{Q}}$ за $q\text{-}\mathcal{BELS}(\overline{\mathbb{Q}})$.

Теорема (Ф)

$$q\text{-}\mathcal{BELS}(\mathbb{C}) \simeq q\text{-}\mathcal{BELS}(\overline{\mathbb{Q}})$$

Результат: какие свойства получили

1) Легко видеть, что категория $\mathbf{Free}_2$-$\mathcal{REP}_{fin.dim}(\mathbb{F}_q)$ абелева.

Результат: какие свойства получили

1) Легко видеть, что категория $\mathbf{Free}_2$-$\mathcal{REP}_{fin.dim}(\mathbb{F}_q)$ абелева.

Теорема

Пусть $\mathcal{L}$ – локально постоянный пучок векторных пространств на X, причем соотвествует представлению $\pi_1(X) \to \mathrm{GL}(V)$, и $\pi_n(X) = 0$ при $n > 1$. Тогда

$$H^*(X, \mathcal{L}) \simeq H^*(\pi_1(X), V)$$

Результат: какие свойства получили

1) Легко видеть, что категория $\mathbf{Free}_2$-$\mathcal{REP}_{fin.dim}(\mathbb{F}_q)$ абелева.

Теорема

Пусть $\mathcal{L}$ – локально постоянный пучок векторных пространств на X, причем соотвествует представлению $\pi_1(X) \to \mathrm{GL}(V)$, и $\pi_n(X) = 0$ при $n > 1$. Тогда

$$H^*(X, \mathcal{L}) \simeq H^*(\pi_1(X), V)$$

Когомологии группы $\mathbf{Free}_2$ – объект сложный, нужно использовать продвинутую технику:

Теорема (Спектральная последовательность Линдона-Хохшильда-Серра)

Пусть $H \trianglelefteq G$ и $A \in\in G$-$\mathcal{MOD}$, тогда

$$H^p(G/N, H^q(N, A)) \Rightarrow H^{p+q}(G, A)$$

Результат: какие свойства получили

2) Множество $\frac{q\text{-}\mathcal{TRIP}}{\simeq}$ является множеством замкнутых точек ind-схемы:

$$\frac{q\text{-}\mathcal{TRIP}}{\simeq} \longleftrightarrow (\mathbf{GL}_{\infty,\mathbb{F}_q} \times \mathbf{GL}_{\infty,\mathbb{F}_q})(\mathbb{F}_q)$$

$$\mathbf{GL}_{\infty,\mathbb{F}_q} \times \mathbf{GL}_{\infty,\mathbb{F}_q} := \varinjlim \mathbf{GL}_{d,\mathbb{F}_q} \times \mathbf{GL}_{d,\mathbb{F}_q}$$

2) Множество $\frac{q\text{-}\mathcal{TRIP}}{\simeq}$ является множеством замкнутых точек ind-схемы:

$$\frac{q\text{-}\mathcal{TRIP}}{\simeq} \longleftrightarrow (\mathbf{GL}_{\infty,\mathbb{F}_q} \times \mathbf{GL}_{\infty,\mathbb{F}_q})(\mathbb{F}_q)$$

$$\mathbf{GL}_{\infty,\mathbb{F}_q} \times \mathbf{GL}_{\infty,\mathbb{F}_q} := \varinjlim \mathbf{GL}_{d,\mathbb{F}_q} \times \mathbf{GL}_{d,\mathbb{F}_q}$$

Квантовым аналогом цикленного типа является набор кратностей характеристического многочлена. В квантовой парадигме поиск детского рисунка по паспорту – решение полиномиальных уравнений.

Результат: какие свойства получили

3) Если воспользоваться какой-либо из формализаций математики над полем из одного элемента $\mathbb{F}_1$ при $q \to 1$ квантовая теория становится классической. Однако теряется абелевость, необходимо работать в парадигме теории гомотопий.
4) При $q \to 1$ так же получается ответ на вопрос, аналогичный ответу в 3)

Что дальше?

1) Построение гомологических инвариантов детских рисунков, используя абелевость категории.
2) Изучение конкретных примеров.
3) Ответ на вопрос о комбинаторных орбитах так же может быть дан с помощью построенных структур, однако это требует развития математики над $\mathbb{F}_1$.