УДК 512.772.7, 515.162.2, 512.585

# Квантовая теория детских рисунков

А.С. Фролов[1]
[1]Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Обозначим за $\mathbb{\Gamma} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. В современной арифметике уже давно стоит очень важная проблема:

**Гипотеза 0.1** (Основная задача теории Галуа)**.** *Пусть $G$ – конечная группа, тогда существует такое конечное расширение $K/\mathbb{Q}$, что $G \simeq \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.*

В своей знаменитой программе Esquisse d'un programme[1] А. Гротендик предлагает новый способ изучения абсолютной группы Галуа $\mathbb{\Gamma}$ с помощью комбинаторной топологии. А именно, он определяет 2 категории:

**Определение 0.1.** *Категорией детских рисунков является категория графов с дополнительными структурами*

$$\mathcal{DESS} := \left\{\left\{ (V,E,F,C,O) \;\middle|\; \begin{array}{l} V - \textit{м-во вершин},\ E - \textit{м-во ребер}, \\ F - \textit{м-во флагов} \\ C : V \to \{0,1\} - \textit{раскраска вершин}, \\ O : (V,F) \to \{1,\dots,n\} - \textit{ориент.} \end{array} \right\}\right\}^{12}$$

*причем морфизмами являются гомоморфизмы графов, сохраняющие раскраску и ориентацию.*

**Определение 0.2.** *Категорией пар Белого над полем $\Bbbk$ называется категория*

$$\mathcal{BELP}(\Bbbk) := \left\{\left\{ (\mathbf{X},\beta) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathbf{X} - \textit{полная алг. кривая}/\Bbbk, \\ \beta : X \to \mathbb{P}^1,\ \mathrm{Crit}(\beta) = \{0,1,\infty\} \end{array} \right\}\right\}$$

*с морфизмами – коммутативными треугольниками.*

Причем, используя знаменитую теорему Белого, Гротендик замечает эквивалентности категорий

**Теорема 0.1.**
$$\mathcal{DESS} \simeq \mathcal{BELP}(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{BELP}(\overline{\mathbb{Q}})$$

Кроме того, обнаруживается, что играют роль и другие категории: категория конечных $\mathrm{Free}_2$-множеств[3] $\mathrm{Free}_2$-$\mathcal{SETS}$ и категория $\mathcal{TRIP}$ троек перестановок, в произведении дающих 1. Все до этого момента упомянутые категории эквивалентны.

[1]Я использую двойные теоретико-множественные обозначения, если подразумеваю, что работаю с категорией

[2]Используется не совсем стандартное, чисто комбинаторное определение категории детских рисунков

[3]за $\mathrm{Free}_2$ обозначается свободная группа на 2-ух образующих

Однако за сравнительно долгое время существования теории, продвижений в обратной задаче теории Галуа не было. Возможно, проблема состоит в том, что наука до сих пор плохо понимает, как устроена каждая из этих категорий. Автор предлагает новую точку зрения на теории детских рисунков, рассматривая квантовые деформации предыдущих категорий. А именно [4]

$$\mathrm{Free}_2\text{-}\mathcal{SETS} \rightsquigarrow \mathrm{Free}_2\text{-}\mathcal{REP}_{fin.dim}(\mathbb{F}_q) - \text{к-я представлений } \mathrm{Free}_2 \text{ над } \mathbb{F}_q$$

$$\mathcal{TRIP} \rightsquigarrow \mathbb{F}_q\text{-}\mathcal{TRIP} - \text{к-я троек матриц } .\mathbb{F}_q\text{, в произведении дающих 1}$$

$$\mathcal{BELP}(\mathbb{C}) \rightsquigarrow \mathbb{F}_q\text{-}\mathcal{LOC}(\mathbb{C}) - \text{к-я } \mathbb{F}_q\text{-локально постоян. пучков на } \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\}$$

Будем говорить, что пучок $\mathcal{F}$ определен над полем $\overline{\mathbb{Q}}$, если его этальное пространство Ét$\mathcal{F}$ определено над $\overline{\mathbb{Q}}$. Обозначим за $\mathbb{F}_q$-$\mathcal{LOC}(\overline{\mathbb{Q}})$ категорию $\mathbb{F}_q$-локально постоянных пучков на $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\}$, определенных над $\overline{\mathbb{Q}}$. Тогда имеет место

**Теорема 0.2.**

$$\mathrm{Free}_2\text{-}\mathcal{REP}_{fin.dim}(\mathbb{F}_q) \simeq \mathbb{F}_q\text{-}\mathcal{TRIP} \simeq \mathbb{F}_q\text{-}\mathcal{LOC}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{F}_q\text{-}\mathcal{LOC}(\overline{\mathbb{Q}})$$

Причем определен забывающий функтор

$$\underline{\mathrm{Forget}} :: \mathcal{LOC}(\overline{\mathbb{Q}}) \to\!\!\to \mathcal{BELP}(\overline{\mathbb{Q}}) \simeq \mathcal{DESS}$$

Построенные выше категории являются абелевыми, что открывает новое направление изучений в теории детских рисунков – поиску их гомологических инвариантов.

Так же интересным является рассмторение формального деквантования $q \to 1$. Автор выбирает работу Н.Дурова [2] в качестве реализации алгебраической геометрии над полем из одного элемента $\mathbb{F}_1$. Таким образом, можно рассматривать классическую теорию детских рисунков, как еще одно проявление математики над полем из одного элемента. Причем в этом случае теория становится гомотопической, что так же является новым направленимем исследований – поиском гомотопических инвариантов детских рисунков.

## Список литературы


[1] Grothendieck, A. (1997). Esquisse d'un programme. London Mathematical Society Lecture Note Series, 5-48.

[2] Durov, N. (2007). New approach to Arakelov geometry. arXiv preprint arXiv:0704.2030.

[3] Sijsling, J., & Voight, J. (2014). On computing Belyi maps. Publications mathematiques de Besancon. Algebre et theorie des nombres, (1), 73-131.

[4] Shabat, G. B., & Voevodsky, V. A. (2007). Drawing curves over number fields. The Grothendieck Festschrift: A Collection of Articles Written in Honor of the 60th Birthday of Alexander Grothendieck, 199-227.


[4] символом $\rightsquigarrow$ обозначается квантовая деформация