

# Нижняя оценка $E/V$ в особом пенни-графе

Рахмонов Фурузонфар

под руководством А.А. Сагдеева

21.07.2024

# Содержание

- ▶ Введение и мотивация
- ▶ Постановка задачи
- ▶ Краткое описание работы и решение
- ▶ Итог
- ▶ Список литературы

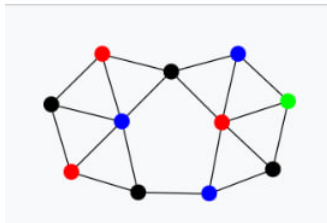
# Введение и мотивация

**Теорема (Эйлер):** Планарный граф на  $n \geq 3$  вершинах имеет не более  $3n - 6$  рёбер.

**Теорема 1 (Lavollée, Swanepoel).** Спичечный граф на  $n$  вершинах имеет не более  $\lfloor 3n - \sqrt{12n - 3} \rfloor$  рёбер.

Пенни-граф — это спичечный граф, такой что расстояние между каждой парой его вершин составляет не менее 1.

Другими словами, для набора точек в плоскости рёбра пенни-графа представляют собой именно кратчайшие расстояния между этими точками.



**Теорема 2 (Тóth)** Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  существует пенни-граф на  $n$  вершинах в общем положении, содержащий  $\frac{37n}{16} - O(\sqrt{n}) = 2.3125n - O(\sqrt{n})$  рёбер. С другой стороны, каждый пенни-граф на  $n$  вершинах в общем положении имеет не более  $\frac{17n}{7} < 2.4286n$  рёбер.

Вторая теорема была доказана Toth-ом в 1997 году, где под общим положением подразумевается, что никакие три точки не лежат на одной прямой. И недавно было доказано, что верхнюю границу можно улучшить дробью  $\frac{43n}{18}$ .

# Постановка задачи

Ранее под определением того, что граф находится в общем положении, подразумевали, что никакие три вершины не лежат на одной прямой. Однако моя задача заключалась в рассмотрении случая, когда никакие  $m \geq 4$  вершин не лежат на одной прямой, и затем оценить  $c_m$ , где  $c_m$  - максимальное значение  $\frac{E}{V}$ .

## Краткое описание работы и решение

Я работал над получением нижней или верхней границы  $c_m$  и удалось получить нижнюю оценку  $c_m$  для бесконечного числа вершин. Получилось следующее:

$$c_m \geq 3 - \frac{20m - 36}{5m^2 - 10m + 1}$$

**Док-во:**

Пусть  $a$  - вектор длины  $m$ . Для любого вектора  $x$  пусть  $\arg(x)$  обозначает угол против часовой стрелки от  $a$  до  $x$ .

Пусть  $\epsilon > 0$  какое-то маленькое число;  $b$ ,  $c$  и  $d$  векторы длины  $m$  такие, что  $\arg(b) = -\frac{\pi}{6} + \epsilon$ ,  $\arg(c) = \frac{\pi}{3}$ ,

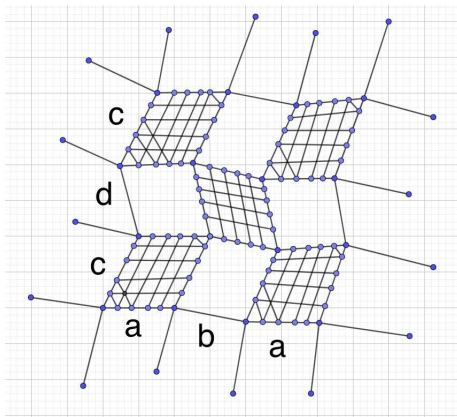
$\arg(d) = \frac{\pi}{2} + \epsilon$ .  $p$  и  $q$  положительные целые числа и

$u_1, u_2, \dots, u_{p-1}$  и  $w_1, w_2, \dots, w_{q-1}$  векторы длины  $m$ ,  $u_{2i+1} = a$ ,  $u_{4i+2} = b$ ,  $w_{2i+1} = c$ ,  $w_{4i+2} = d$ ,  $0 > \arg(u_{4i}) > -\frac{\pi}{6} + \epsilon$ ,  $\frac{\pi}{3} < \arg(w_{4i}) < \frac{\pi}{2} + \epsilon$ . Мы выберем точные значения для  $\arg(u_{4i})$  и  $\arg(w_{4i})$  позже.

Определим конфигурацию  $P_{pq}$  следующим образом:

$$P_{pq} = \{p_{ij} \mid 0 < i \leq p, 0 < j \leq q\} \text{ где}$$

$$p_{ij} = w_1 + \dots + w_{i-1} + u_1 + \dots + u_{j-1}.$$



**Лемма 1.** Существует  $\epsilon > 0$  такое, что никакие  $m$  точек не лежат на одной прямой в этой маленькой конструкции.

## Доказательство:

Сначала фиксируем нижний левый ромб, а затем докажем, что существует конечное число значений  $\epsilon$ , при которых из точек этих пяти ромбов может образоваться прямая, содержащая  $m$  точек этой конструкции и содержащая хотя бы две точки из нижнего левого ромба. Рассмотрим ромб, стоящий посередине, и далее будем двигать ромб относительно их общей вершины. И количество  $\epsilon$ -ов, при которых у нас найдется хотя бы одна точка из среднего ромба, которая на одной прямой с точками из левого нижнего ромба, конечно, так как количество прямых, проходящих через две точки нижнего левого ромба, конечно. Теперь рассмотрим верхний левый ромб, и тут количество  $\epsilon$ -ов конечно. Доказательство аналогично предыдущему случаю, но теперь мы будем двигать ромб относительно стороны среднего ромба.



Для верхнего правого ромба та же ситуация, только мы будем двигать ромб относительно диагонали среднего ромба. Получается, что количество значений  $\epsilon$ , при которых какой-то ромб будет иметь хотя бы одну точку, такую что с двумя точками нижнего левого ромба будут на одной прямой, конечно. Далее тоже самое будем рассматривать относительно четырех оставшихся ромбов, и там тоже будет так, что количество не подходящих  $\epsilon$ -ов конечно. То есть в каждой ситуации у нас есть конечное число неподходящих  $\epsilon$ -ов, а значит пересечение подходящих  $\epsilon$ -ов не пустое, то есть такое, существует, чтобы  $m$  точек не были на одной прямой.

**Лемма 2.** Для любых положительных целых чисел  $p$  и  $q$  мы можем выбрать значения аргументов  $u_{4i}$  и  $w_{4j}$  так, чтобы  $P_{pq}$  находился в общем положении.

**доказательство:**

Достаточно доказать Утверждение в случае, когда и  $p$ , и  $q$  делятся на 4, т.е. когда  $p = 4r$  и  $q = 4s$ . Мы докажем Утверждение по индукции по  $r$  и  $s$ . В повторяющемся шаблоне на рисунке выше, который представляет собой конфигурацию  $P_{44}$ , где нет  $m$  точек на одной прямой. Предположим, мы можем выбрать значения аргументов  $\arg(u_{4i})$  и  $\arg(w_{4j})$  так, что в конфигурации  $P_{4(r-1),4s}$  точки находятся в общем положении. Построим  $P_{4r,4s}$ , выбрав значение  $\arg(u_{4(r-1)})$ . Для любого значения  $\arg(u_{4(r)})$  множество точек, которое мы пытаемся добавить к  $P_{4(r-1),4s}$ , это

$$R = \{p_{ij} \mid 4(r-1) < i \leq 4r, 0 < j \leq 4s\}$$

перенос конфигурации

$$\{p_{ij} \mid 4(r-2) < i \leq 4(r-1), 0 < j \leq 4s\}$$

которая находится в общем положении по предположению. Изменение  $\arg(u_{4(r-1)})$  приводит к сдвигу  $R$ . Если для определенного значения  $\arg(u_{4r-1})$  конфигурация  $P_{4r,4s}$ ,  $P_{4(r-1),4s}$  содержит точку из  $R$ , либо, наоборот, прямая, определенная точками из  $R$ , содержит точку из  $P_{4(r-1),4s}$ . Но оба события могут произойти только для конечного числа значений  $\arg(u_{4(r-1)})$ ,  $0 > \arg(u_{4(r-1)}) > -\pi/6 + \epsilon$ , такое что конфигурация  $P_{4r,4s}$  находится в общем положении. Тем же аргументом мы можем перейти от  $s - 1$  к  $s$ . Таким образом, для любой пары  $r$  и  $s$  существует конфигурация точек в общем положении,  $P_{4r,4s}$ . Ч.Т.Д

## Количество вершин и рёбер

Далее посчитаем количество вершин и рёбер.

Количество ромбов со сторонами  $a$  и  $c$  будет  $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ , и со сторонами  $b$  и  $d$   $\lfloor \frac{p}{4} \rfloor \cdot \lfloor \frac{q}{4} \rfloor$ .

$$V = \left( \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor \right) \cdot (m-1)^2 + \left( \left\lfloor \frac{p}{4} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{q}{4} \right\rfloor \right) \cdot (m-1)^2 - 4 \cdot \left( \left\lfloor \frac{p}{4} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{q}{4} \right\rfloor \right)$$

$$E = (2(m-1)(m-2) + (m-2)^2) \left( \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p}{4} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{q}{4} \right\rfloor \right)$$






Возьмем  $p = q = 4k$  и посчитаем предел  $\frac{E}{V}$  при  $k$  стремящемся к бесконечности (т.е количество вершин у нас бесконечно много):

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E}{V} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E = (2(m-1)(m-2) + (m-2)^2) \left( \lfloor \frac{4k}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{4k}{2} \rfloor + \lfloor \frac{4k}{4} \rfloor \right)}{\left( \lfloor \frac{4k}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{4k}{2} \rfloor \right) \cdot (m-1)^2 - 4 \cdot \left( \lfloor \frac{4k}{4} \rfloor \cdot \lfloor \frac{4k}{4} \rfloor \right)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5k^2(m-2)(3m-4)}{k^2(5(m-1)^2-4)} = \frac{15m^2-50m+40}{5m^2-10m+1} = \\ &= \left( 3 - \frac{20m-37}{5m^2-10m+1} \right) \end{aligned}$$

Получилось, что если у нас бесконечно много вершин, то  $c_m$  можно ограничить снизу следующим выражением:

$$c_m \geq 3 - \frac{20m - 36}{5m^2 - 10m + 1}$$

# Список литературы

-  [1] J. Lavollée, K. Swanepoel, *Bounding the number of edges of matchstick graphs*, SIAM J. Discrete Math., 36:1, 777–785, 2022.
-  [2] H. Harborth, *Match sticks in the plane*, in: The Lighter Side of Mathematics, edited by R. K. Guy and R. E. Woodrow, 281–288, Mathematical Association of America, Washington, D.C, 1986.
-  [3] H. Harborth, *Solution to problem 664A*, Elem. Math., 29, 14–15, 1974.
-  [4] G. Tóth, *The shortest distance among points in general position*, Comput. Geom., 8:1, 33–38, 1997.
-  [5] A. Sagdeev, General penny graphs are at most  $43/18$ -dense, preprint arXiv:2402.09131.