Нижняя оценка E/V в особом пенни-графе

Рахмонов Фурузонфар
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Пенни-граф — это граф, построенный из спичек, так, что расстояние между каждой парой его вершин составляет не менее 1. Другими словами, для набора точек в плоскости рёбра пенни-графа представляют собой именно кратчайшие расстояния между этими точками. Для упрощения будем считать, что две вершины соединены, если их расстояние равно 1, а если нет, то получается, что расстояние между вершинами больше 1.Граф находится в общем положении, если никакие три вершины не лежат на одной прямой.

Нас интересует некоторая оценка отношения количества рёбер к количеству вершин в таких графах. На сегодняшний день доказаны несколько теорем на этот счёт. Ниже приведены некоторые известные теоремы:

Теорема 1 (Lavoll´ee, Swanepoel) Спичечный граф на n вершинах имеет не более $\left\lfloor 3n - \sqrt{12n-3} \right\rfloor$ рёбер.

Теорема 2 (T´oth) Для каждого $n \in N$ существует пенни-граф на n вершинах в общем положении, содержащий $\frac{37n}{16} - O(\sqrt{n}) = 2.3125n - O(\sqrt{n})$ рёбер. С другой стороны, каждый пенни-граф на n вершинах в общем положении имеет не более $\frac{17n}{7} < 2.4286n$ рёбер.

Вторая теорема была доказана Toth-ом в 1997 году, где под общим положением подразумевается, что никакие три точки не лежат на одной прямой. И недавно было доказано, что верхнюю границу можно улучшить дробью $\frac{43n}{18}$.

Ранее под определением того, что граф находится в общем положении, подразумевали, что никакие три вершины не лежат на одной прямой. Однако моя задача заключалась в рассмотрении случая, когда никакие $m \geq 4$ вершин не лежат на одной прямой, и затем оценить c_m, где c_m - максимальное значение $\frac{E}{V}$ на n вершинах.

Полученные результаты это нижняя оценка c_m для бесконечного числа точек, и вышло, что

$$c_m \geq 3 - \frac{20m-36}{5m^2-10m+1}$$

Доказательство было полученно с помощью индукции и одной леммы. Далее будет формулировка леммы.

Пусть $\epsilon > 0$ какое-то маленькое чиисло; b, c и d векторы длины m такие, что $\arg(b) = -\frac{\pi}{6} + \epsilon$, $\arg(c) = \frac{\pi}{3}$, $\arg(d) = \frac{\pi}{2} + \epsilon$. p и q положительные целые числа и $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$ и $w_1, w_2, \ldots, w_{q-1}$ векторы длины m, $u_{2i+1} = a$, $u_{4i+2} = b$, $w_{2i+1} = c$, $w_{4i+2} = d$, $0 > \arg(u_{4i}) > -\frac{\pi}{6} + \epsilon$, $\frac{\pi}{3} < \arg(w_{4i}) < \frac{\pi}{2} + \epsilon$. Мы выберем точные значения для $\arg(u_{4i})$ и $\arg(w_{4i})$ позже. Определим конфигурацию $P_(pq)$ следующим образом:

$P_{pq} = \{p_{ij} \mid 0 < i \leq p, 0 < j \leq q\}$ где $p_{ij} = w_1 + \ldots + w_{i-1} + u_1 + \ldots + u_{j-1}$. И потом делим стороны как показано на рисунке1.

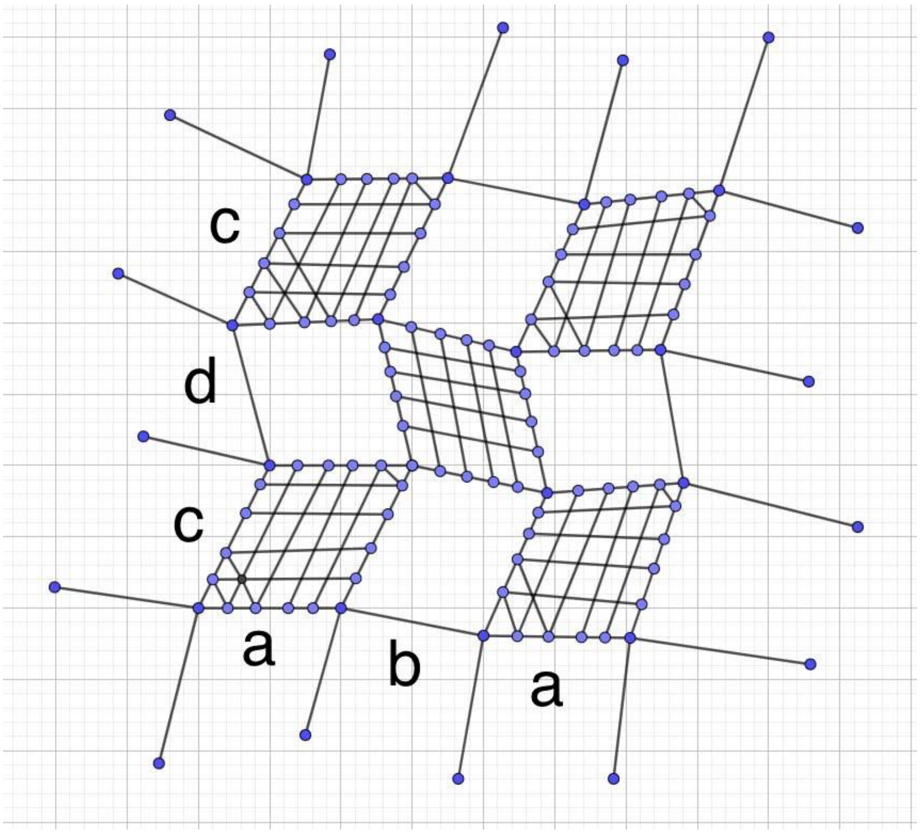

Рис. 1:

Лемма Существует $\epsilon > 0$ такое, что никакие m точек не лежат на одной прямой в этой маленькой конструкции(Рис.1)

Список литературы

[1] E. Ackerman, On the maximum number of edges in topological graphs with no four pairwise crossing edges, Discrete Comput. Geom., 41, 365–375, 2009.

[2] E. Ackerman, On topological graphs with at most four crossings per edge, Comput. Geom., 85, 101574, 2019.

[3] E.E. Ackerman, G. Tardos, On the maximum number of edges in quasi-planar graphs, J. Combin. Theory Ser. A, 114:3, 563–571, 2007.

[4] E.K. Appel, W. Haken, Every planar map is four colorable. Part I. Discharging, Ill. J. Math., 21, 429–490, 1977.

[5] G. T´oth, The shortest distance among points in general position, Comput. Geom., 8:1, 33–38, 1997.

[6] E.J. Pach, G. T´oth, Graphs drawn with few crossings per edge, Combinatorica, 17:3, 427–439, 1997.