Представления групп кос

Артемов Федор

Московский Физико-Технический Институт

artemov.fi@phystech.edu

21 мая 2024 г.

Overview

- Введение в тему и мотивация задачи
- Представление PB_n и известные результаты
- Результаты за семестр
- Литература

Мотивация

Теорема (Александер, связь узлов и кос)

Для любого зацепления L существует такая коса B, что $Cl(B) = L$.

Перенос инвариантов

Инварианты кос $\rightarrow$ Инварианты узлов

Важный вопрос

Будет ли инвариант полным?

Напоминание: группа кос

Группу кос на n нитях можно определить несколькими способами(и все они, разумеется, эквивалентны). Вот один из них:

Алгебраическое определение

Зададим группу B_n ее копредставлением. Образующие: $\sigma_1, ...\sigma_{n-1}$

$$\begin{cases} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{для} \quad |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & \text{для} \quad 1 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$

Известный прием исследовать группу - изучать ее представления, или же гомомоморфизмы в $GL(n, R)$..

Известные результаты

Представление Бурау

Рассмотрим неприводимое представление Бурау
$\psi : B_n \to GL(n-1, \mathbb{Z}[q^2, q^{-2}])$
Оно неточное для $n \geq 5$. Для $n = 4$ это открытый вопрос.

$$\sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} -q^2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-3} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_i \mapsto \begin{pmatrix} E_{i-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & -q^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n-i-2} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{n-1} \mapsto \begin{pmatrix} E_{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & q^2 & -q^2 \end{pmatrix}$$

Задача

Задача

Исследовать новое представление группы крашеных кос, предложенное В.О.Мантуровым и И.М.Никоновым.

Оно строится как композиция нескольких гомоморфизмов:
$p_k : PB_n \to CPB_{n-1}$
$f_d : CB_n \to VCB_n$
$\rho : VCB_n \to GL(n, \mathbb{Z}[s, s^{-1}, t, t^{-1}])$.

Гомоморфизм p_K

Пусть β - крашеная коса на n нитях, $k \in \{1, ..., n\}$. Для каждого $l \neq k$ рассмотрим отображение $p_k(\beta_l)$:
$p_k(\beta_l)(t) = \beta_l(t) - \beta_k(t)$

Утверждение 1

$p_k : PB_n \to CPB_{n-1}$ - гомоморфизм между группой крашеных кос на n нитях и группой крашеных цилиндрических кос на $n-1$ нити.

Гомоморфизм f_d

Можно определить группу виртуальных кос в цилиндре. Теперь, рассмотрим отображение степени $f_d(z) = z^d$.

Утверждение

$f_d : CB_n \to VCB_n$ - гомоморфизм групп.

Представление ρ

Утверждение

Рассмотрим представление группы VCB_{n-1} следующего вида

$$\sigma_k \mapsto \begin{pmatrix} E_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n-k-2} \end{pmatrix}$$

$$\tau_k \mapsto \begin{pmatrix} E_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & s^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n-k-2} \end{pmatrix}$$

$$\varsigma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & E_{n-2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Представление PB_n

Композиция

Итого, получаем представление $\rho : PB_n \to GL(n-1, \mathbb{Z}[s, s^{-1}, t, t^{-1}])$. Оно зависит от трех параметров: n - число нитей, k - выбор нити для первого гомоморфизма, d - степень для второго. Будем называть его (n, k, d) - представлением.

Построенное представление(а именно (5,1,2)) отправляет элемент ядра представления Бурау группы PB_5 не в единичную матрицу.

Результаты работы за семестр

Утверждение

(3, k, d) и (n, k, 1) - неточные представления для $\forall n, k, d$.

Это наводит на мысли, что данное представление стоит частично модифицировать, и уже для нового представления изучать вопрос точности и получения инварианта для узлов.

Литература

V.O. Manturov, I.M. Nikonov: Maps from braids to virtual braids and braid representations(2023)
https://doi.org/10.48550/arXiv.2210.06862

В.О. Мантуров: Теория узлов (2005)