515.162.8

Представление группы кос

Ф.И. Артемов, В.О. Мантуров

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Аннотация В работе рассматривается представление групп крашеных кос PB_n. Оно строится как композиция нескольких гомоморфизмов, зависящих от выбора начальной нити и степени для гомоморфизма $z \to z^d$. Показано, что для кос на трех нитях представление неточное, а также дана некоторая оценка на условие, при котором представление может быть точным.

Ключевые слова: Группы кос, теория узлов.

Во многих разделах математики достаточно естественен вопрос, как различать те или иные объекты. Хороший способ решать такую задачу - строить различные инварианты.

С узлами тесно связаны косы. Они в каком-то смысле проще, поскольку, например, обладают групповой структурой. Именно поэтому достаточно интересно изучать косы, строить для них какие-то инварианты, а затем пытаться перенести результат на узлы(пример такого - связь представления Бурау с полиномом Александера). В данной работе рассматривается представление группы крашеных кос на n нитях:

$$\varrho : PB_n \to GL_{n-1}(\mathbb{Z}[s, s^{-1}, t, t^{-1}]) \tag{1}$$

Оно строится следующим образом. Рассмотрим косу $\beta \in PB_n$. Для начала выберем нить под номером $k \in \{1, .., n\}$ и построим относительно нее гомоморфизм в группу кос на $n-1$ нити в цилиндре следующим образом

$$\forall l \in \{1, .., n\}\ l \neq k \ \ p_k(\beta_l)(t) = \frac{\beta_l(t) - \beta_k(t)}{|\beta_l(t) - \beta_k(t)|} \tag{2}$$

Далее, рассмотрим гомоморфизм из CPB_n в группу виртуальных кос в цилиндре VCB_n. Построим его следующим образом:

$$f_d(z) = z^d \tag{3}$$

Если аккуратно проследить, что происходить с образующими Артина, то при композиции данных гомоморфизмов у нас появляются те, которые соответствуют классическим перекресткам, те, которые соответствуют виртуальным перекресткам, и та коса, которая соответствует проходу нити по всем цилиндру. Задав для них следующие матрицы

$$\sigma_k \mapsto \begin{pmatrix} E_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n-k-2} \end{pmatrix}$$

$$\tau_k \mapsto \begin{pmatrix} E_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & s^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n-k-2} \end{pmatrix}$$

$$\varsigma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & E_{n-2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

получим итоговое представление. Из построения видно, что оно зависит от трех параметров: число нитей, номер начальной нити для p_k, степень в f_d. Поэтому будем называть это (n, k, d)-представлением.

Lemma 1. $(3, k, d)-$*представления неточны.*

Похожим способом можно получить следующее утверждение

Lemma 2. $(n, k, 1)-$*представления неточны.*

Список литературы

1. V.O. Manturov, I.M. Nikonov: Maps from braids to virtual braids and braid representations(2023) https://doi.org/10.48550/arXiv.2210.06862
2. В.О. Мантуров: Теория узлов (2005)