

Нижние оценки чисел независимости графов расстояний с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$

Ахияров Артур
под руководством д. ф.-м. н. А. М. Райгородского

17 мая 2024

- 1 Введение и постановка задачи
- 2 Ранние нижние оценки
- 3 Результаты работы
- 4 Список литературы

1 Введение и постановка задачи

2 Ранние нижние оценки

3 Результаты работы

4 Список литературы

Развитие линейно-алгебраического метода привело к тому, что в работе [4] была улучшена нижняя оценка $\chi(\mathbb{R}^n)$:

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.239 \dots + o(1))^n.$$

Идея улучшения заключается в использовании дистанционных графов, вершины которых — $(-1, 0, 1)$ -векторы, то есть векторы с координатами из множества $\{-1, 0, 1\}$. С тех пор $(-1, 0, 1)$ -векторы были использованы в большом количестве смежных проблем и породили значительное количество новых задач.

$\{-1, 0, 1\}$ вектора

Пусть n – натуральное число и k_{-1}, k_0, k_1 – натуральные числа, в сумме дающие n . Пусть

$$V_n(k_{-1}, k_0, k_1) = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{-1, 0, 1\}, |\{i : x_i = -1\}| = k_{-1}, |\{i : x_i = 0\}| = k_0, |\{i : x_i = 1\}| = k_1\}.$$

Пусть теперь t – произвольное целое число. Нас будет интересовать величина

$$m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t) = \max\{|W| : W \subset V_n(k_{-1}, k_0, k_1), (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq t \text{ для всех } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W\},$$

т.е. максимальное количество векторов, которым запрещено иметь скалярные произведения равные t .

Верхние оценки для $m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$ тоже существуют!

1 Введение и постановка задачи

2 Ранние нижние оценки

3 Результаты работы

4 Список литературы

ТЕОРЕМА 1. Пусть фиксированы неотрицательные целые числа

$$m_1, m_2, m_3, m_{-1,1}, m_{0,1}, m_{1,1}, m_{-1,2}, m_{0,2}, m_{1,2}, m_{-1,3}, m_{0,3}, m_{1,3},$$

удовлетворяющие ограничениям:

$$m_1 + m_2 + m_3 = n,$$

$$m_{-1,x} + m_{0,x} + m_{1,x} = m_x \text{ для всех } x \in \{1, 2, 3\},$$

$$m_{y,1} + m_{y,2} + m_{y,3} = k_y \text{ для всех } y \in \{-1, 0, 1\},$$

$$\sum_{z=1}^3 \text{mdp}(m_{-1,z}, m_{0,z}, m_{1,z}) > t.$$

Тогда

$$m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t) \geq \prod_{x=1}^3 C_{m_x}^{m_{-1,x}} C_{m_{0,x}+m_{1,x}}^{m_{0,x}}.$$

Возрастающая оценка из [1]

ТЕОРЕМА 2. Пусть k_{-1}, k_0, k_1 таковы, что знаменатель следующей дроби не равен нулю. Тогда имеет место неравенство

$$m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t) \geq \frac{C_n^{k_1+k_{-1}} C_{k_1+k_{-1}}^{k_1}}{\sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{\min(k_1-i, k_{-1})} \sum_{e=0}^{k_{-1}} \sum_{f=0}^{\min(k_{-1}-e, k_1)} C_{k_1}^i C_{k_1-i}^j C_{k_{-1}}^e C_{k_{-1}-e}^f C_{k_0}^{k_1-i-f} C_{k_0-k_1+i+f}^{k_{-1}-e-j} P(i, j, e, f, t)},$$

где

$$P(i, j, e, f, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } i - j + e - f \geq t, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Предыдущая наилучшая оценка для $m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $t_1 \leq t$. Пусть фиксированы неотрицательные целые числа

$$m_1, m_2, m_3, m_{-1,1}, m_{0,1}, m_{1,1}, m_{-1,2}, m_{0,2}, m_{1,2}, m_{-1,3}, m_{0,3}, m_{1,3},$$

как и в теореме 1 удовлетворяющие ограничениям:

$$m_1 + m_2 + m_3 = n,$$

$$m_{-1,x} + m_{0,x} + m_{1,x} = m_x \text{ для всех } x \in \{1, 2, 3\},$$

$$m_{y,1} + m_{y,2} + m_{y,3} = k_y \text{ для всех } y \in \{-1, 0, 1\},$$

$$\sum_{z=1}^3 \text{mdp}(m_{-1,z}, m_{0,z}, m_{1,z}) > t.$$

Наложим дополнительное ограничение:

$$t_1 + 2(m_{0,1} + 2m_{1,1} + m_{-1,2} + m_{1,2} + 2m_{-1,3} + m_{0,3}) \leq t.$$

Предыдущая наилучшая оценка для $m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$

Пусть также \mathcal{F} – такая совокупность векторов из $V_n(m_1, m_2, m_3)$, что для любых двух $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{F}$ выполнено $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < t_1$ и

$$|\mathcal{F}| = \frac{C_n^{m_1+m_3} C_{m_1+m_3}^{m_1}}{\sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{\min(k_1-i, k_{-1})} \sum_{e=0}^{k_{-1}} \sum_{f=0}^{\min(k_{-1}-e, k_1)} C_{k_1}^i C_{k_1-i}^j C_{k_{-1}}^e C_{k_{-1}-e}^f C_{k_0}^{k_1-i-f} C_{k_0-k_1+i+f}^{k_{-1}-e-j} P(i, j, e, f, t_1)}.$$

Тогда выполнена оценка

$$m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t) \geq |\mathcal{F}| \prod_{x=1}^3 C_{m_x}^{m_{-1,x}} C_{m_0, x+m_{1,x}}^{m_{0,x}}.$$

- 1 Введение и постановка задачи
- 2 Ранние нижние оценки
- 3 Результаты работы**
- 4 Список литературы

Новая нижняя оценка для $m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $t_1 \leq t$. Пусть фиксированы неотрицательные целые числа

$$m_1, m_2, m_3, m_{-1,1}, m_{0,1}, m_{1,1}, m_{-1,2}, m_{0,2}, m_{1,2}, m_{-1,3}, m_{0,3}, m_{1,3},$$

как и в теореме 1 удовлетворяющие ограничениям:

$$m_1 + m_2 + m_3 = n,$$

$$m_{-1,x} + m_{0,x} + m_{1,x} = m_x \text{ для всех } x \in \{1, 2, 3\},$$

$$m_{y,1} + m_{y,2} + m_{y,3} = k_y \text{ для всех } y \in \{-1, 0, 1\},$$

$$\sum_{z=1}^3 \text{mdp}(m_{-1,z}, m_{0,z}, m_{1,z}) > t.$$

Наложим дополнительное ограничение:

$$t_1 + 2(m_{0,1} + 2m_{1,1} + m_{-1,2} + m_{1,2} + 2m_{-1,3} + m_{0,3}) \leq t.$$

Новая нижняя оценка для $m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$

Пусть, далее, $t_1 < s < m_1 + m_3$. Пусть \mathcal{F} – такая совокупность векторов из $V_n(m_1, m_2, m_3)$, что для любых двух $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{F}$ выполнено $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < s$ и

$$|\mathcal{F}| = \frac{C_n^{m_1+m_3} C_{m_1+m_3}^{m_1}}{\sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{\min(k_1-i, k_{-1})} \sum_{e=0}^{k_{-1}} \sum_{f=0}^{\min(k_{-1}-e, k_1)} C_{k_1}^i C_{k_1-i}^j C_{k_{-1}}^e C_{k_{-1}-e}^f C_{k_0}^{k_1-i-f} C_{k_0-k_1+i+f}^{k_{-1}-e-j} P(i, j, e, f, s)}.$$

Тогда выполнена оценка

$$m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t) \geq |\mathcal{F}| \left(\prod_{x=1}^3 C_{m_x}^{m_{-1,x}} C_{m_{0,x}+m_{1,x}}^{m_{0,x}} - |\mathcal{F}| C_{m_2}^{m_{-1,2}} C_{m_{0,2}+m_{1,2}}^{m_{0,2}} \right. \\ \left. \max_{l_{1,1}+l_{-1,-1}-l_{1,-1}-l_{-1,1} < s} \sum_{j=t-2(m_{1,2}+m_{-1,2})}^{l_{1,1}+l_{-1,-1}+l_{1,-1}+l_{-1,1}} \sum_{i=0}^j C_{l_{1,1}+l_{-1,-1}+l_{1,-1}+l_{-1,1}}^j C_j^i \right. \\ \left. C_{m_1+m_3-(l_{1,1}+l_{-1,-1}+l_{1,-1}+l_{-1,1})}^{m_{1,1}+m_{1,3}+m_{-1,1}+m_{-1,3}-j} C_{m_{1,1}+m_{1,3}+m_{-1,1}+m_{-1,3}-j}^{m_{1,1}+m_{1,3}-i} \right).$$

- 1 Введение и постановка задачи
- 2 Ранние нижние оценки
- 3 Результаты работы
- 4 Список литературы

- [1] А. В. Бобу, А. Э. Куприянов, А. М. Райгородский, “Асимптотическое исследование задачи о максимальном числе ребер однородного гиперграфа с одним запрещенным пересечением”, Математический сборник, 207:5, 2016, 17-42.
- [2] Е. И. Пономаренко, А. М. Райгородский, “Новые верхние оценки чисел независимости графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$ и их приложения в задачах о хроматических числах дистанционных графов”, Математические заметки, 96:1, 2014, 138-147.
- [3] А. Э. Гутерман, В. К. Любимов, А. М. Райгородский, А. С. Усачев, “О числах независимости дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$: оценки, гипотезы и приложения к проблемам Нельсона–Эрдеша–Хадвигера и Борсука”, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил., 65, ВИНТИ, М., 2009, 82–100.
- [4] А.М. Райгородский, “О хроматическом числе пространства”, УМН, 55:2(332), 2000, 147–148.