УДК 519.1

Нижние оценки чисел независимости графов расстояний с вершинами в $\{-1,0,1\}^n$

А. М. Райгородский, А. Р. Ахияров

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Одной из наиболее интересных и сложных задач комбинаторной геометрии является проблема Нелсона–Эрдеша–Хадвигера, которая получила широкую известность в середине XX века. Она заключается в отыскании величины $\chi(\mathbb{R}^n)$ — хроматического числа пространства, то есть минимального количества цветов, в которые можно так покрасить все точки $\mathbb{R}^n$, чтобы любые две точки на расстоянии 1 были разных цветов. Удивительно, что задача по-прежнему далека от разрешения даже для случая плоскости.

Развитие линейно-алгебраического метода привело к тому, что в работе [4] была улучшена нижняя оценка $\chi(\mathbb{R}^n)$:

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.239\ldots + o(1))^n.$$

Идея улучшения заключается в использовании дистанционных графов, вершины которых — $(-1,0,1)$-векторы, то есть векторы с координатами из множества $\{-1,0,1\}$. С тех пор $(-1,0,1)$-векторы были использованы в большом количестве смежных проблем и породили значительное количество новых задач.

В частности, можно определить аналог величины $m(n,k,t)$ для случая $(-1,0,1)$-векторов. А именно, введем

$$V_n(k_{-1},k_0,k_1) = \{\mathbf{x} = (x_1,...,x_n) : x_i \in \{-1,0,1\}, |\{i : x_i = -1\}| = k_{-1}, |\{i : x_i = 0\}| = k_0, |\{i : x_i = 1\}| = k_1\}$$

и величину

$$m(n,k_{-1},k_0,k_1,t) = \max\{|W| : W \subset V_n(k_{-1},k_0,k_1),\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \neq t \text{ для всех } \mathbf{x},\mathbf{y} \in W\}.$$

Данная величина по сути впервые исследуется в работе [3]. Эта статья дает нижную оценку величины $m(n,k_{-1},k_0,k_1,t)$, однако ограничивается довольно частным случаем $k_{-1}+k_1 = k_0$ и $t = 0$. Работа [2], напротив, дает новые верхние оценки $m(n,k_{-1},k_0,k_1,t)$, которые применимы в широком диапазоне значений параметров.

Целью настоящей работы будет исследование величины $m(n,k_{-1},k_0,k_1,t)$. В первую очередь мы сфокусируемся на получении нижних оценок для широкого диапазона значений k_{-1},k_0,k_1 и t. В данном исследовании мы ограничимся асимптотическим случаем. Более формально, пусть числа $k'_{-1},k'_0,k'_1,t' \in (0,1)$ таковы, что $k'_{-1}+k'_0+k'_1 = 1$. Далее мы будем считать, что $k_{-1} \sim k'_{-1}n, k_0 \sim k'_0 n, k_1 \sim k'_1 n$ и $t \sim t'n$ при $n \to \infty$. Понятно, что в этом случае и нижние, и верхние оценки будут вида $(\lambda(k'_1, k'_{-1}, k'_0, t') + o(1))^n$, где значение λ не зависит от n. Мы будем считать, что две оценки различаются сильно, если имеют разные величины λ.

С использованием конструкций из работ [3], [1] была сформулирована и доказана следующая теорема:

ТЕОРЕМА. Пусть $t_1 \leqslant t$. Пусть фиксированы неотрицательные целые числа

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_{-1,1},\ m_{0,1},\ m_{1,1},\ m_{-1,2},\ m_{0,2},\ m_{1,2},\ m_{-1,3},\ m_{0,3},\ m_{1,3},$$

удовлетворяющие ограничениям:

$$m_1 + m_2 + m_3 = n,$$

$$m_{-1,x} + m_{0,x} + m_{1,x} = m_x \text{ для всех } x \in \{1, 2, 3\},$$

$$m_{y,1} + m_{y,2} + m_{y,3} = k_y \text{ для всех } y \in \{-1, 0, 1\},$$

$$\sum_{z=1}^{3} \operatorname{mdp}(m_{-1,z}, m_{0,z}, m_{1,z}) > t.$$

Наложим дополнительное ограничение:

$$t_1 + 2(m_{0,1} + 2m_{1,1} + m_{-1,2} + m_{1,2} + 2m_{-1}) \leqslant t.$$

Пусть, далее, $t_1 < s < m_1 + m_3$ и $t - 2(m_{1,2} + m_{-1,2}) \geqslant 0$. Пусть $\mathscr{F}$ – такая совокупность векторов из $V_n(m_1, m_2, m_3)$, что для любых двух $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{F}$ выполнено $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < s$ и

$$|\mathscr{F}| = \frac{C_n^{m_1+m_3} C_{m_1+m_3}^{m_1}}{\sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{\min(k_1-i, k_{-1})} \sum_{e=0}^{k_{-1}} \sum_{f=0}^{\min(k_{-1}-e, k_1)} C_{k_1}^{i} C_{k_1-i}^{j} C_{k_{-1}}^{e} C_{k_{-1}-e}^{f} C_{k_0}^{k_1-i-f} C_{k_0-k_1+i+f}^{k_{-1}-e-j} P(i,j,e,f,s)},$$

где

$$P(i,j,e,f,t) = \begin{cases} 1, & \text{если } i - j + e - f \geqslant t, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда выполнена оценка

$$m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t) \geqslant |\mathscr{F}|(\prod_{x=1}^{3} C_{m_x}^{m_{-1,x}} C_{m_{0,x}+m_{1,x}}^{m_{0,x}} - |\mathscr{F}| C_{m_2}^{m_{-1,2}} C_{m_{0,2}+m_{1,2}}^{m_{0,2}} \cdot$$

$$\max_{m_1+m_3-m_2 \leqslant l < \min(s+4\min(m_1,m_3), m_1+m_3)} \sum_{j=t-2(m_{1,2}+m_{-1,2})}^{l} \sum_{i=0}^{j} C_l^j C_j^i$$

$$C_{m_1+m_3-l}^{m_{1,1}+m_{1,3}+m_{-1,1}+m_{-1,3}-j} C_{m_{1,1}+m_{1,3}+m_{-1,1}+m_{-1,3}-j}^{m_{1,1}+m_{1,3}-i}).$$

Список литературы

[1] А. В. Бобу, А. Э. Куприянов, А. М. Райгородский, “Асимптотическое исследование задачи о максимальном числе ребер однородного гиперграфа с одним запрещенным пересечением”, Математический сборник, 207:5, 2016, 17-42.

[2] Е. И. Пономаренко, А. М Райгородский, “Новые верхние оценки чисел независимости графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$ и их приложения в задачах о хроматических числах дистанционных графов”, Математические заметки, 96:1, 2014, 138-147.

[3] А. Э. Гутерман, В. К. Любимов, А. М. Райгородский, А. С. Усачев, “О числах независимости дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$: оценки, гипотезы и приложения к проблемам Нельсона–Эрдеша–Хадвигера и Борсука”, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил., 65, ВИНИТИ, М., 2009, 82–100.

[4] А.М. Райгородский, “О хроматическом числе пространства”, УМН, 55:2(332), 2000, 147–148.