Penny Graphs

Рахмонов Фурузонфар

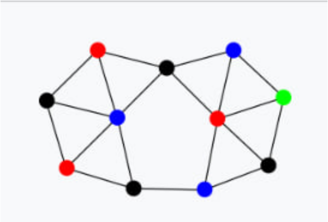
под руководством А.А. Сагдеева

05.07.2024

Содержание

Две картинки рядом

Пенни-граф — это граф, построенный из спичек, так, что расстояние между каждой парой его вершин составляет не менее 1. Другими словами, для набора точек на плоскости рёбра пенни-графа представляют собой именно кратчайшие расстояния между этими точками. Для упрощения будем считать, что две вершины соединены, если расстояние между ними равно 1, а если нет, то получается, что расстояние между вершинами больше 1.



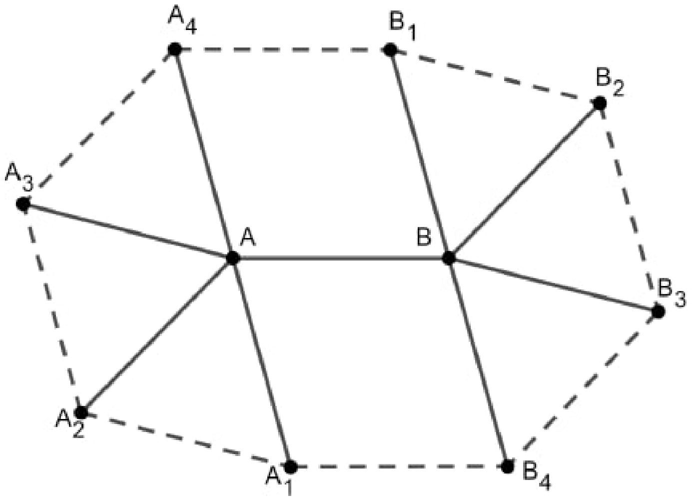
Определение
Граф находится в общем положении, если никакие три вершины не лежат на одной прямой.

Лемма 1. Если граф находится в общем положении, то степень каждой вершины в таком графе не может превышать 5.

Лемма 2. Если две смежные вершины обе имеют степень 5, то у них есть общий сосед.

Доказательство. Предположим обратное, а именно, что две смежные вершины A и B со степенью 5 не имеют общего соседа. Мы обозначаем их оставшихся соседей как A_1, A_2, A_3, A_4 и B_1, B_2, B_3, B_4 соответственно, по часовой стрелке, см. Рисунок 1. Подсчитаем сумму всех 10 углов вокруг A и B двумя способами. С одной стороны, очевидно, что результат равен 4π. С другой стороны, $\angle A_4AB + \angle ABB_1 \geq \pi$, $\angle A_1AB + \angle ABB_4 \geq \pi$, в то время как каждый из оставшихся 6 углов не менее $\pi/3$. Эти два значения совпадают только в том случае, если все неравенства становятся равенствами. Однако в этом случае A_1, A и A_4 коллинеарны, что противоречит предположению.

Рисунок 1



Постоновка задачи

Далее в пенни-графе начали оценивать сверху и снизу отношение $\frac{E}{V}$, где E - количество рёбер, а V - количество вершин, и получили некоторые результаты, которые будут представлены на следующем слайде.
Ранее под определением того, что граф находится в общем положении, подразумевали, что никакие три вершины не лежат на одной прямой. Однако моя задача заключалась в рассмотрении случая, когда никакие $m \geq 4$ вершин не лежат на одной прямой, и затем оценить c_m, где c_m - максимальное значение $\frac{E}{V}$.

Известные результаты

Theorem 2. Let c(m) denote the maximum number of times the minimum distance can occur among m points in general position in the plane. Then

$$(2 + \tfrac{5}{16}) \cdot n - 10 \cdot \lfloor \sqrt{n} \rfloor < c(n) \leq (2 + \tfrac{3}{7}) \cdot n.$$

Теорема была доказана Toth-ом в 1997 году, где под общим положением подразумевается, что никакие три точки не лежат на одной прямой. И недавно доказали, что сверху можно ограничить дробью $\frac{43n}{18}$.

Полученные результаты

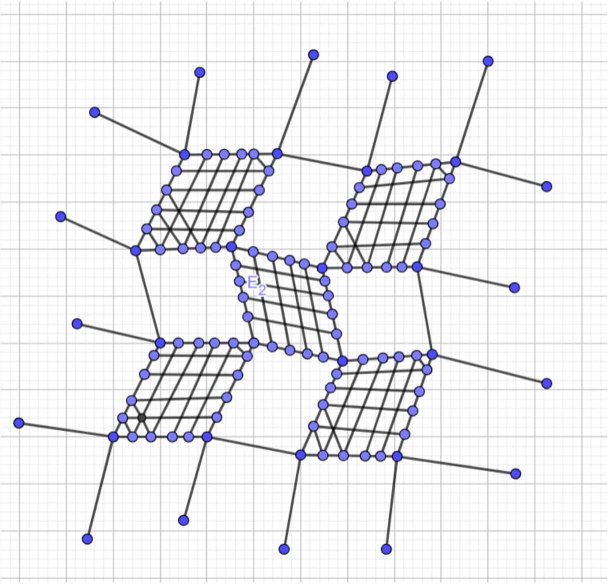
Я получил нижнюю оценку c_m для бесконечного числа точек, и вышло, что

$$c_m \geq 3 - \frac{20m - 36}{5m^2 - 10m + 1}$$

Доказательство: Пусть a - вектор длины m. Для любого вектора x пусть $\arg(x)$ обозначает угол против часовой стрелки от a до x.

Пусть $\epsilon > 0$ какое-то маленькое чиисло; b, c и d векторы длины m такие, что $\arg(b) = -\frac{\pi}{6} + \epsilon$, $\arg(c) = \frac{\pi}{3}$, $\arg(d) = \frac{\pi}{2} + \epsilon$. p и q положительные целые числа и $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$ и $w_1, w_2, \ldots, w_{q-1}$ векторы длины m, $u_{2i+1} = a$, $u_{4i+2} = b$, $w_{2i+1} = c$, $w_{4i+2} = d$, $0 > \arg(u_{4i}) > -\frac{\pi}{6} + \epsilon$, $\frac{\pi}{3} < \arg(w_{4i}) < \frac{\pi}{2} + \epsilon$. Мы выберем точные значения для $\arg(u_{4i})$ и $\arg(w_{4i})$ позже. Определим конфигурацию $P_(pq)$ следующим образом:

$P_{pq} = \{p_{ij} \mid 0 < i \leq p, 0 < j \leq q\}$ где
$\mathrm{p}_{ij} = w_1 + \ldots + w_{i-1} + u_1 + \ldots + u_{j-1}.$:



Далее докажем, что существует $\epsilon > 0$ такое, что никакие m точек не лежат на одной прямой в этой маленькой конструкции. Сначала фиксируем нижний левый ромб, а затем докажем, что существует конечное число значений ϵ, при которых из точек этих пяти ромбов может образоваться прямая, содержащая m точек этой конструкции и содержащая хотя бы две точки из нижнего левого ромба. Рассмотрим ромб, стоящий посередине, и далее будем двигать ромб относительно их общей вершины. И количество ϵ-ов, при которых у нас найдется хотя бы одна точка из среднего ромба, которая на одной прямой с точками из левого нижнего ромба, конечно, так как количество прямых, проходящих через две точки нижнего левого ромба, конечно. Теперь рассмотрим верхний левый ромб, и тут количество ϵ-ов конечно. Доказательство аналогично предыдущему случаю, но теперь мы будем двигать ромб относительно стороны среднего ромба. Для верхнего правого ромба та же ситуация, только мы будем двигать ромб относительно диагонали среднего ромба.

Получается, что количество значений ϵ, при которых какой-то ромб будет иметь хотя бы одну точку, такую что с двумя точками нижнего левого ромба будут на одной прямой, конечно. Далее тоже самое будем рассматривать относительно четырех оставшихся ромбов, и там тоже будет так, что количество не подходящих ϵ-ов конечно. То есть в каждой ситуации у нас есть конечное число неподходящих ϵ-ов, а значит пересечение подходящих ϵ-ов не пустое, то есть такое, существует, чтобы m точек не были на одной прямой.

Лемма 3. Для любых положительных целых чисел p и q мы можем выбрать значения аргументов u_{4i} и w_{4i} так, чтобы P_{pq} находился в общем положении.

доказательство:

Достаточно доказать Утверждение в случае, когда и p, и q делятся на 4, т.е. когда $p = 4r$ и $q = 4s$. Мы докажем Утверждение по индукции по r и s. В повторяющемся шаблоне на рисунке выше, который представляет собой конфигурацию P_{44}, где нет m точек на одной прямой. Предположим, мы можем выбрать значения аргументов $\arg(u_{4i})$ и $\arg(w_{4j})$ так, что в конфигурации $P_{4(r-1),4s}$ точки находятся в общем положении. Построим $P_{4r,4s}$, выбрав значение $\arg(u_{4(r-1)})$. Для любого значения $\arg(u_{4(r)})$ множество точек, которое мы пытаемся добавить к $P_{4(r-1),4s}$, это

$R = \{p_{ij} \,|\, 4(r-1) < i \leq 4r,\, 0 < j \leq 4s\}$

перенос конфигурации

$\{p_{ij} \,|\, 4(r-2) < i \leq 4(r-1),\, 0 < j \leq 4s\}$

которая находится в общем положении по предположению. Изменение $\arg(u_{4(r-1)})$ приводит к сдвигу R. Если для определенного значения $\arg(u_{4r-1})$ конфигурация $P_{4r,4s},, P_{4(r-1),4s}$, содержит точку из R, либо, наоборот, прямая, определенная точками из R, содержит точку из $P_{4(r-1),4s}$. Но оба события могут произойти только для конечного числа значений $\arg(u_{4(r-1)}), 0 > \arg(u_{4(r-1)}) > -\pi/6 + \epsilon$, такое что конфигурация $P_{4r,4s}$ находится в общем положении. Тем же аргументом мы можем перейти от $s-1$ к s. Таким образом, для любой пары r и s существует конфигурация точек в общем положении, $P_{4r,4s}$. Ч.Т.Д

Количество вершин и рёбер

Далее посчитаем количество вершин и рёбер.
Количество ромбов со сторонами и будет $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$, и со сторонами b и d $\left\lfloor \frac{p}{4} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{q}{4} \right\rfloor$.

$$V = \left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor \right) \cdot (m-1)^2 - 4 \cdot \left(\left\lfloor \frac{p}{4} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{q}{4} \right\rfloor \right)$$

$$E = \left(2(m-1)(m-2) + (m-2)^2\right) \left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p}{4} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{q}{4} \right\rfloor \right)$$

Возьмем $p = q = 4k$ и посчитаем предел $\frac{E}{V}$ при k стремящемся к бесконечности (т.е количество вершин у нас бесконечно много):

$$\lim_{k\to\infty} \frac{E}{V} = \lim_{k\to\infty} \frac{E = \left(2(m-1)(m-2) + (m-2)^2\right)\left(\left\lfloor \frac{4k}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{4k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4k}{4} \right\rfloor\right.}{\left(\left\lfloor \frac{4k}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{4k}{2} \right\rfloor\right) \cdot (m-1)^2 - 4 \cdot \left(\left\lfloor \frac{4k}{4} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{4k}{4} \right\rfloor\right)}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{5k^2(m-2)(3m-4)}{k^2(5(m-1)^2-4)} = \frac{15m^2 - 50m + 40}{5m^2 - 10m + 1} =$$

$$= \left(3 - \frac{20m-37}{5m^2-10m+1}\right)$$

Список литературы