Нижние оценки чисел независимости графов расстояний с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$

Ахияров Артур
под руководством д. ф.-м. н. А. М. Райгородского

7 мая 2024

Содержание

Содержание

{-1, 0, 1} вектора

Пусть n – натуральное число и k_{-1}, k_0, k_1 – натуральные числа, в сумме дающие n. Пусть

$$V_n(k_{-1}, k_0, k_1) = \{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) : x_i \in \{-1, 0, 1\}, |\{i : x_i = -1\}| = k_{-1}, |\{i : x_i = 0\}| = k_0, |\{i : x_i = 1\}| = k_1\}.$$

Пусть теперь t – произвольное целое число. Нас будет интересовать величина

$$m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t) = \max\{|W| : W \subset V_n(k_{-1}, k_0, k_1),\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq t \text{ для всех } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W\},$$

т.е. максимальное количество векторов, которым запрещено иметь скалярные произведения равные t.

Верхние оценки для $m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$ тоже существуют!

Содержание

Убывающая оценка для $m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$

ТЕОРЕМА 1. Пусть фиксированы неотрицательные целые числа

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_{-1,1},\ m_{0,1},\ m_{1,1},\ m_{-1,2},\ m_{0,2},\ m_{1,2},\ m_{-1,3},\ m_{0,3},\ m_{1,3},$$

удовлетворяющие ограничениям:

$$m_1 + m_2 + m_3 = n,$$

$$m_{-1,x} + m_{0,x} + m_{1,x} = m_x \text{ для всех } x \in \{1, 2, 3\},$$

$$m_{y,1} + m_{y,2} + m_{y,3} = k_y \text{ для всех } y \in \{-1, 0, 1\},$$

$$\sum_{z=1}^{3} \mathrm{mdp}(m_{-1,z}, m_{0,z}, m_{1,z}) > t.$$

Тогда

$$m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t) \geqslant \prod_{x=1}^{3} C_{m_x}^{m_{-1,x}} C_{m_{0,x}+m_{1,x}}^{m_{0,x}}.$$

Возрастающая оценка для $m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$

ТЕОРЕМА 2. Пусть k_{-1}, k_0, k_1 таковы, что знаменатель следующей дроби не равен нулю. Тогда имеет место неравенство

$$m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t) \geqslant \frac{C_n^{k_1+k_{-1}} C_{k_1+k_{-1}}^{k_1}}{\sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{\min(k_1-i, k_{-1})} \sum_{e=0}^{k_{-1}} \sum_{f=0}^{\min(k_{-1}-e, k_1)} C_{k_1}^i C_{k_1-i}^j C_{k_{-1}}^e C_{k_{-1}-e}^f C_{k_0}^{k_1-i-f} C_{k_0-k_1+i+f}^{k_{-1}-e-j} P(i,j,e,f,t)},$$

где

$$P(i,j,e,f,t) = \begin{cases} 1, & \text{если } i - j + e - f \geqslant t, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Предыдущая наилучшая оценка для $m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $t_1 \leqslant t$. Пусть фиксированы неотрицательные целые числа

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_{-1,1},\ m_{0,1},\ m_{1,1},\ m_{-1,2},\ m_{0,2},\ m_{1,2},\ m_{-1,3},\ m_{0,3},\ m_{1,3},$$

как и в теореме 1 удовлетворяющие ограничениям:

$$m_1 + m_2 + m_3 = n,$$

$$m_{-1,x} + m_{0,x} + m_{1,x} = m_x \text{ для всех } x \in \{1, 2, 3\},$$

$$m_{y,1} + m_{y,2} + m_{y,3} = k_y \text{ для всех } y \in \{-1, 0, 1\},$$

$$\sum_{z=1}^{3} \mathrm{mdp}(m_{-1,z}, m_{0,z}, m_{1,z}) > t.$$

Наложим дополнительное ограничение:

$$t_1 + 2(m_{0,1} + 2m_{1,1} + m_{-1,2} + m_{1,2} + 2m_{-1,3} + m_{0,3}) \leqslant t.$$

Предыдущая наилучшая оценка для $m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$

Пусть также $\mathscr{F}$ – такая совокупность векторов из $V_n(m_1, m_2, m_3)$, что для любых двух $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{F}$ выполнено $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < t_1$ и

$$|\mathscr{F}| = \frac{C_n^{m_1+m_3} C_{m_1+m_3}^{m_1}}{\sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{\min(k_1-i,k_{-1})} \sum_{e=0}^{k_{-1}} \sum_{f=0}^{\min(k_{-1}-e,k_1)} C_{k_1}^{i} C_{k_1-i}^{j} C_{k_{-1}}^{e} C_{k_{-1}-e}^{f} C_{k_0}^{k_1-i-f} C_{k_0-k_1+i+f}^{k_{-1}-e-j} P(i,j,e,f,t_1)}.$$

Тогда выполнена оценка

$$m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t) \geqslant |\mathscr{F}| \prod_{x=1}^{3} C_{m_x}^{m_{-1,x}} C_{m_{0,x}+m_{1,x}}^{m_{0,x}}.$$

Содержание

Новая нижняя оценка для $m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $t_1 \leqslant t$. Пусть фиксированы неотрицательные целые числа

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_{-1,1},\ m_{0,1},\ m_{1,1},\ m_{-1,2},\ m_{0,2},\ m_{1,2},\ m_{-1,3},\ m_{0,3},\ m_{1,3},$$

как и в теореме 1 удовлетворяющие ограничениям:

$$m_1 + m_2 + m_3 = n,$$

$$m_{-1,x} + m_{0,x} + m_{1,x} = m_x \text{ для всех } x \in \{1, 2, 3\},$$

$$m_{y,1} + m_{y,2} + m_{y,3} = k_y \text{ для всех } y \in \{-1, 0, 1\},$$

$$\sum_{z=1}^{3} \mathrm{mdp}(m_{-1,z}, m_{0,z}, m_{1,z}) > t.$$

Наложим дополнительное ограничение:

$$t_1 + 2(m_{0,1} + 2m_{1,1} + m_{-1,2} + m_{1,2} + 2m_{-1,3} + m_{0,3}) \leqslant t.$$

Новая нижняя оценка для $m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$

Пусть, далее, $t_1 < s < m_1 + m_3$. Пусть $\mathscr{F}$ – такая совокупность векторов из $V_n(m_1, m_2, m_3)$, что для любых двух $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{F}$ выполнено $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < s$ и

$$|\mathscr{F}| = \frac{C_n^{m_1+m_3} C_{m_1+m_3}^{m_1}}{\sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{\min(k_1-i,k_{-1})} \sum_{e=0}^{k_{-1}} \sum_{f=0}^{\min(k_{-1}-e,k_1)} C_{k_1}^i C_{k_1-i}^j C_{k_{-1}}^e C_{k_{-1}-e}^f C_{k_0}^{k_1-i-f} C_{k_0-k_1+i+f}^{k_{-1}-e-j} P(i,j,e,f,s)}.$$

Тогда выполнена оценка

$$m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t) \geqslant |\mathscr{F}|(\prod_{x=1}^{3} C_{m_x}^{m_{-1,x}} C_{m_{0,x}+m_{1,x}}^{m_{0,x}} - |\mathscr{F}| C_{m_2}^{m_{-1,2}} C_{m_{0,2}+m_{1,2}}^{m_{0,2}} \cdot$$

$$\max_{l_{1,1}+l_{-1,-1}-l_{1,-1}-l_{-1,1}<s} \sum_{j=t-2(m_{1,2}+m_{-1,2})}^{l_{1,1}+l_{-1,-1}+l_{1,-1}+l_{-1,1}} \sum_{i=0}^{j} C_{l_{1,1}+l_{-1,-1}+l_{1,-1}+l_{-1,1}}^{j} C_j^i$$

$$C_{m_1+m_3-(l_{1,1}+l_{-1,-1}+l_{1,-1}+l_{-1,1})}^{m_{1,1}+m_{1,3}+m_{-1,1}+m_{-1,3}-j} C_{m_{1,1}+m_{1,3}+m_{-1,1}+m_{-1,3}-j}^{m_{1,1}+m_{1,3}-i}).$$

Содержание

Список литературы

[1] Е. И. Пономаренко, А. М. Райгородский *Новые верхние оценки чисел независимости графов с вершинами в* $\{-1, 0, 1\}^n$ *и их приложения в задачах о хроматических числах дистанционных графов*

[2] В. Ф. Москва, А. М. Райгородский, *Новые нижние оценки чисел независимости графов расстояний с вершинами в* $\{-1, 0, 1\}^n$

[3] А. Э. Гутерман, В. К. Любимов, А. М. Райгородский, С. А. Усачев, *О числах независимости графов расстоя- ний с вершинами в* $\{-1, 0, 1\}^n$

[4] А. М. Райгородский, *Вероятность и алгебра в комбинаторике*

[5] А. В. Бобу, А. Э. Куприянов, А. М. Райгородский, *Асимптотическое исследование задачи о максимальном числе ребер однородного гиперграфа с одним запрещенным пересечением*