Разрезание центрально-симметричного многоугольника на две конгруэнтные части

Садовничий Антон (МФТИ)
Научный руководитель:
Канель-Белов Алексей Яковлевич (МФТИ)
kanel@mccme.ru

7 мая 2024 г.

Содержание

Напоминание

Общая формулировка гипотезы

Выпуклую ограниченную центрально-симметричную фигуру в $\mathbb{R}^n$ разбили на две конгруэнтные части. Верно ли, что центр симметрии обязательно лежит на общей границе двух частей?

В случае невыпуклой фигуры построен контрпример для клеточного многоугольника, разбитого на две части, каждая из которой состоит из нескольких компонент связности.

Теорема 1

Далее мы будем рассматривать задачу в основном на плоскости.

Теорема 1

Если две части, на которые разбита фигура, переводятся друг в друга движением, не являющимся поворотом, то гипотеза верна (отметим, даже для невыпуклой фигуры).

Теорема 2

Центрально-симметричный многоугольник разбит (несамопересекающейся) ломаной на две связные (в том смысле, что каждая часть является простым многоугольником) конгруэнтные части. Тогда центр симметрии лежит на ломаной разбиения.

Теорема 2'

Теорема 2'

Центрально-симметричный фигура, граница которой является простой (несамопересекающейся) кусочно-гладкой кривой, разбита (несамопересекающейся) кусочно-гладкой кривой на две связные конгруэнтные части. Тогда центр симметрии фигуры лежит на кривой разбиения.

Покажем, что все пункты доказательства теоремы 2 переносятся на случай кусочно-гладких кривых.
Во-первых, точки «разрыва» (отсутствия гладкости) границы можно считать вершинами фигуры, а угол при вершине определить как угол между правой и левой касательной в ней.
Далее, вспомним, что части (назовем их А и Б) переводятся друг в друга поворотом.

Лемма из доказательства

Легко показать, что Лемма[1] обобщается на следующую формулировку:

Лемма

Существует общий участок границы фигуры и части А, который при повороте переходит в общий участок границы фигуры и части Б.

Аналогично, максимальный по включению такой участок «заканчивается» в кривой разбиения.

[1] Lemma 2 from Eriksson, K. (1996). Splitting a Polygon into Two Congruent Pieces. The American Mathematical Monthly, 103(5), 393–400. https://doi.org/10.2307/2974930

Иллюстрация к Лемме

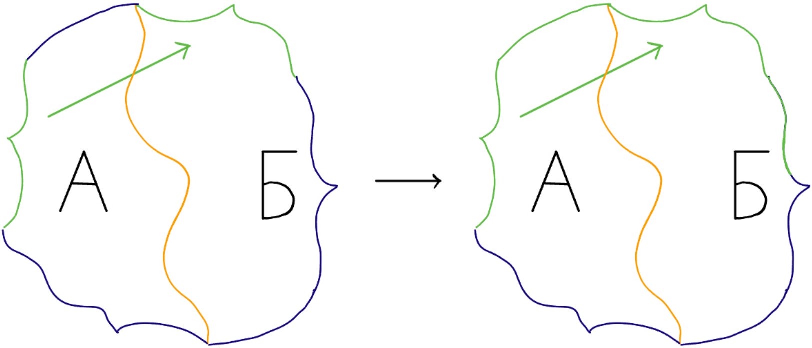

Рис. 1: Участок границы из Леммы отмечен зеленым цветом

Первый случай

Для начала заметим, что из равенства периметров частей А и Б концы кривой — центрально-симметричные точки фигуры.

Первый случай

Вся общая граница части А и фигуры перешла в общую границу части Б и фигуры.

В таком случае поворот — это автоматически центральная симметрия, которая сохраняет фигуру на месте.

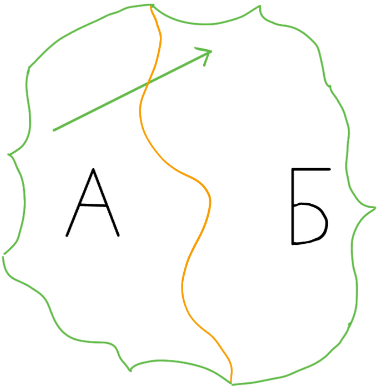

Рис. 2: Кривая центрально-симметрична

Второй случай

Второй случай

Пересечение образа кривой разбиения при повороте с прообразом имеет ненулевую длину.

В этом случае получается, что два «угла» при начале кривой в совокупности образуют полный угол, в частности два участка границы фигуры по левую и правую сторону от начала кривой разреза должны полностью накладываться в какой-то окретности этой точки, что противоречит простоте границы

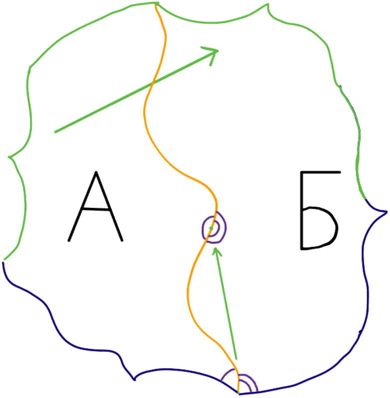

Рис. 3: Два «угла» с одной и двумя дужками образуют полный угол

Третий случай

Образ (и прообраз) кривой разбиения при повороте целиком лежит на границе фигуры.

Аналогично случаю многоугольника: Рассмотрим прообраз кривой (l_1 на рисунке). Запустим следующий процесс: отразим центрально-симметрично l_1, если образ имеет ненулевую длину пересечения с l_2, завершим. Иначе повернем образ из Б в А, опять отразим

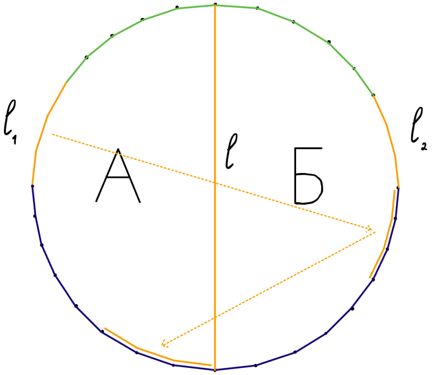

Рис. 4: Кривая l_1 отражается и поворачивается до пересечения с l_2

Третий случай: иллюстрация

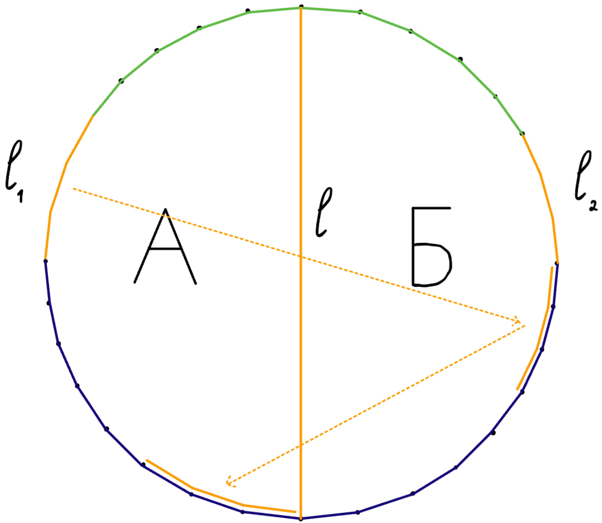

Рис. 5: Кривая l_1 отражается и поворачивается до пересечения с l_2

Третий случай: первый вариант

Первый вариант

Образ l_1 целиком совпал с l_2.

В этом случае легко видеть, что кривая центрально-симметрична (при этом центр симметрии — середина отрезка между концами кривой, то есть совпадает с центром симметрии фигуры).

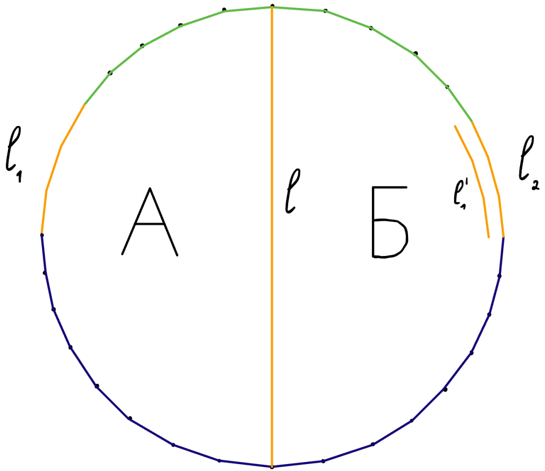

Рис. 6: Кривая центрально-симметрична

Третий случай: второй вариант

Второй вариант

Образ l_1 пересекается с l_2, но не совпадает.

В этом случае аналогично получаем, что два «угла» при начале кривой образуют полный угол, что невозможно.

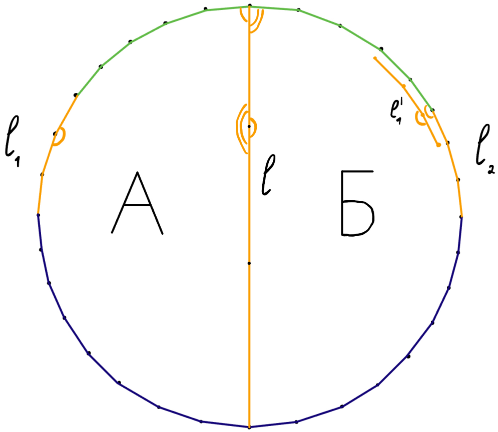

Рис. 7: Два «угла» с одной и двумя дужками образуют полный угол

Основная гипотеза

Проанализируем основную гипотезу на плоскости, когда фигура, для простоты, — выпуклый многоугольник. Части можно также считать состоящими из нескольких многоугольников, т. е. считать все разрезы прямыми линиями (отрезками). Назовем части А и Б и вспомним, что движение, переводящее А в Б, можно считать поворотом. Первый случай. Предположим, что центр этого поворота лежит строго вне фигуры. Рассмотрим ближайшую точку фигуры X к центру поворота. Такая точка единственна в силу выпуклости фигуры. Тогда окрестность X не может лежать ни в одной из частей А или Б, т. к. и при повороте, и при обратном повороте эта окрестность оказывается вне фигуры. Противоречие.

Второй случай

Теперь предположим, что центр поворота лежит на границе фигуры (многоугольника). Ни умаляя общности, мы можем считать, что поворот идет против часовой стрелки на угол, меньший 180°. Рассмотрим образ всего многоугольника при этом повороте. Рассмотрим первую «слева» (против часовой стрелки относительно центра поворота) точку X пересечения границы многоугольника и его образа. Тогда окрестность справа от этой точки X не может принадлежать ни части А, ни части Б.

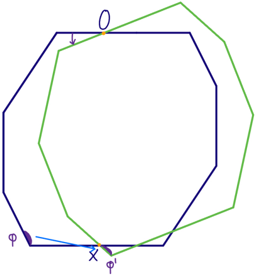

Рис. 8: Центр поворота на границе фигуры

Третий случай

Остается случай центра поворота внутри многоугольника. Тогда покажем, что угол поворота — рациональное число (в градусах). Рассмотрим достаточно малый круг с центром в точке поворота (в частности, чтобы ни одна дуга ненулевой длины не лежала на общей границе частей). Тогда окружность, ограничивающая круг, разбивается на дуги, принадлежащие частям А и Б. Рассмотрим одну из наибольших дуг, принадлежащих части А. Тогда при повороте эта дуга переходит в часть Б, при еще одном повороте в часть А и т.д.

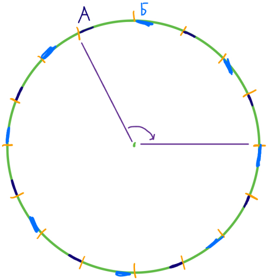

Рис. 9: Центр поворота внутри фигуры

Конец

Спасибо за внимание!