

Анализ реализаций симплекс-метода в решателях с открытым кодом

Федоренко Екатерина

Научный руководитель: Роланд Хильдебранд

Команда: Екатерина Федоренко, Денис Лейбман

Московский физико-технический институт

fedorenko.es@phystech.edu

21 апреля 2024 г.

Содержание

- 1 Немного про решаемую задачу
 - Симплекс-метод
- 2 Найденные решения
 - Вычисления
 - Остановка и заикливание
 - CHUZC
- 3 Литература
- 4 Цели

Напоминание

Стандартная форма линейной программы

$$\min_{x \geq 0} c^T x : Ax = b, \quad (1)$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $0 < \text{rk } A = m < n$.

В процессе работы симплекс-метода поддерживаются два дизъюнктивных множества индексов столбцов $B \subset [n]$, $|B| = m$ и $N = [n] \setminus B$ – базисные и небазисные индексы, а также невырожденная подматрица A_{*B} – матрица базисных столбцов.

Итерация прямого симплекс-метода

- ❶ CHUZC: выбрать некоторым способом индекс q в строке \hat{c}_N текущих стоимостей – входящий элемент.
- ❷ FTRAN: получить опорный q -ый столбец $\hat{A}_{*q} = A_{*B}^{-1} A_{*q}$.
- ❸ CHUZR: выбрать некоторым образом индекс строки p – выходящий элемент, положить $\alpha = \hat{b}_p / \hat{A}_{pq}$. Обновляем столбец \hat{b} : $\hat{b} \leftarrow \hat{b} - \alpha \hat{A}_{*q}$.
- ❹ BTRAN: получить строку $\pi_p^T = e_p^T A_{*B}^{-1}$.
- ❺ PRICE: получить опорную p -ю строку $\hat{A}_{p*} = \pi_p^T A_{*N}$. Обновить стоимость: $\hat{c}^T \leftarrow \hat{c}^T - \hat{c}_q \hat{a}_p^T$.
- ❻ Либо заново провести LU-разложение для A_{*B}^{-1} , либо обновить текущее разложение, дописав новую матрицу в список факторов.

Изучаемый решатель



Вычисления

$B^{-1} : INVERT$

$$B = LU$$

LU - разложение выполняется с помощью метода Марковца для разреженных матриц.

$B^{-1} : UPDATE$

$$\bar{B} = B + (a_q - Be_p)e_p^T = B(I + (\hat{a}_q - e_p)e_p^T) = BE$$

E - это матрица, которая будет легко обратима

Теперь при обновлении матрицы B(замена столбца) надо будет обратить только E

Двойственное вырождение

- Если некоторые небазисные двойственные значения $c_N^T - c_B^T B^{-1} N$ нулевые, то вершина является двойственно вырожденной
- В этой вершине итерация двойственного симплекс метода может не привести к увеличению двойственного аргумента.
- Так может произойти заикливание или остановка

Изменение стоимости

- Добавим небольшие значения к некоторым значениям коэффициентам c .
- Тогда в худшем случае небазисные двойственные значения принимают небольшие положительные значения.
- Итерация двойственного симплекс метода будет хотя бы на немного увеличивать значение
- При достижении оптимума нужно убрать добавленные значения
- После этого могут потребоваться дополнительные итерации так как потеряна оптимальность

CHUZZ разреженность

Даже для задач, у которых матрица является гипер разреженной, вектор базисных стоимостей может быть полным. Вектор, приведенных затрат, заданный формулой:

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$$

тоже может быть полным.

Только если строка $e_p^T B^{-1} N$ разрежена, количество стоимостей, которые изменяются на каждой итерации невелико. Тогда можем повысить эффективность CHUZZ

Эффективный CHUZZ

Будем поддерживать набор S , состоящий из небольшого числа переменных s , который гарантированно включает переменную s наибольшей отрицательной приведенной стоимостью

В начале итерации инициализируем переменные:

- g - самая отрицательная приведенная стоимость
- h - самая низкая приведенная стоимость тех небазисных переменных, которых нет в S .

Эффективный CHUZC

- Если $h < g$, то повторно инициализируем C , выполнив полный CHUZC: просмотреть все небазисные переменные и найти $s + 1$ с наименьшими приведенными стоимостями. Сохранить значения s с наименьшими приведенными затратами s в C .
- Найти и удалить переменную с наилучшей сниженной стоимостью из C .
- При обновлении приведенных затрат – сформировать набор D переменных (не входящих в C) с наименьшими s приведенными затратами, которые изменились

Эффективный CHUZO

- Обновлять h каждый раз, когда переменная, не включенная в D , имеет меньшую приведенную стоимость, чем текущее значение h .
- Обновить значение C , чтобы оно соответствовало наименьшим приведенным затратам s в $C \cup D$, установить значение g на наименьшую приведенную стоимость в результирующем C и обновить значение h , если переменная, которая не включена в C , имеет меньшую приведенную стоимость, чем текущее значение h

Литература



Rump, Siegfried (2005)

High precision evaluation of nonlinear functions



Uwe H. Suhl and Leena Suhl (1990)

Computing Sparse LU Factorizations for Large-Scale Linear Programming Bases
Inform Journal on Computing 2(4), 325 – 335.

Текущие цели

- Разобрать оставшиеся решатели: Lpsolve и COIN-OR (Соответственно, Денис разбирает SCIP и GLPK).
- Составить итоговую сравнительную таблицу со списком решений проблем в разных решателях с их описаниями.