Представления групп кос

Артемов Федор

Московский Физико-Технический Институт

artemov.fi@phystech.edu

23 апреля 2024 г.

Overview

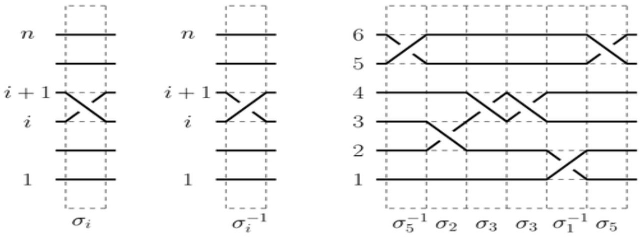
- Напоминание задачи
- Новое представление
- Свойства
- Дальнейшие планы

Напоминание: группа кос

Алгебраическое определение

Зададим группу B_n ее копредставлением. Генераторы: $\sigma_1, ...\sigma_{n-1}$

$$\begin{cases} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{для} \quad |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & \text{для} \quad 1 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$



Напоминание : представление Бурау

Представление Бурау

Рассмотрим неприводимое представление Бурау
$\psi : B_n \to GL(n-1, \mathbb{Z}[q^2, q^{-2}])$

$$\sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} -q^2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-3} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_i \mapsto \begin{pmatrix} E_{i-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & -q^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n-i-2} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{n-1} \mapsto \begin{pmatrix} E_{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & q^2 & -q^2 \end{pmatrix}$$

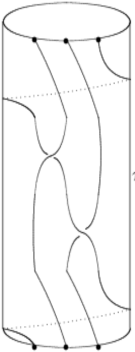
Напоминание : представление Бурау

Представление Бурау неточное для $n \geq 5$. Для $n = 4$ это открытый вопрос.

Цилиндрические диаграммы узлов

Определение

Цилиндрической косой на n нитях будем называть элемент $\pi_1(C_n)$,где C_n-конфигурационное пространство цилиндра.



$\tau\sigma_1^{-1}\sigma_2\tau$

Гомоморфизм p_K

Пусть β - крашеная коса на n нитях, $k \in \{1, ..., n\}$. Для каждого $l \neq k$ рассмотрим отображение $p_k(\beta_l) : [0, 1] \to S^1$
$p_k(\beta_l)(t) = \frac{\beta_l(t) - \beta_k(t)}{|\beta_l(t) - \beta_k(t)|}$

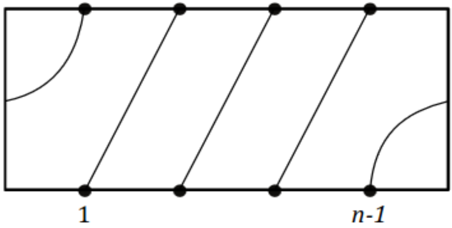
Утверждение 1

$p_k : PB_n \to CPB_{n-1}$ - гомоморфизм между группой крашеных кос на n нитях и группой крашеных цилиндрических кос на $n - 1$ нити.

Группа кос

Что происходит с генераторами

$$p_k(\sigma_i^\epsilon) = \begin{cases} \sigma_{k-i-1}^\epsilon, & \text{если i} \neq k, k-1 \\ \varsigma^{-1}, & \text{если i = k - 1, } \epsilon = 1 \\ \varsigma, & \text{если i = k, } \epsilon = -1 \\ \sigma_1 \dots \sigma_{n-2}, & \text{если i = k - 1, } \epsilon = -1 \\ (\sigma_1 \dots \sigma_{n-2})^{-1}, & \text{если i = k, } \epsilon = 1 \end{cases}$$

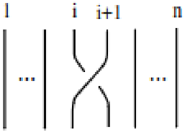


Виртуальные косы

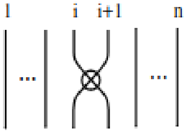
Определение

Генераторы: $\sigma_1, \ldots \sigma_{n-1}, v_1, \ldots, v_{n-1}$

$$\begin{cases} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{для} \quad |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & \text{для} \quad 1 \leq i \leq n-2 \\ v_i v_j = v_j v_i & \text{для} \quad |i-j| \geq 2 \\ v_i v_{i+1} v_i = v_{i+1} v_i v_{i+1} & \text{для} \quad 1 \leq i \leq n-2 \\ v_i^2 = e & \\ \sigma_i v_{i+1} v_i = v_{i+1} v_i \sigma_{i+1} & \text{для} \quad 1 \leq i \leq n-2 \\ \sigma_i v_j = v_j \sigma_i & \text{для} \quad |i-j| \geq 2 \end{cases}$$



σ_i ,



v_i

Гомоморфизм f_d

Аналогично, можно определить группу виртуальных кос в цилиндре. Теперь, рассмотрим отображение степени $f_d(z) = z^d$.

Утверждение

$f_d : CB_n \to VCB_n$ - гомоморфизм групп.

Что происходит с генераторами

$f_d(\sigma_k^\epsilon) = \sigma_k^\epsilon$
$f_d(\varsigma) = \varsigma(\tau_1 ... \tau_{n-2}\varsigma)^{d-1}$

Представление

Утверждение

Рассмотрим представление группы VCB_{n-1} следующего вида

$$\sigma_k \mapsto \begin{pmatrix} E_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n-k-2} \end{pmatrix}$$

$$\tau_k \mapsto \begin{pmatrix} E_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & s^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n-k-2} \end{pmatrix}$$

$$\varsigma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & E_{n-2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Отличие от Бурау

Композиция

Итого, получаем представление $\rho : PB_n \to GL(n-1, \mathbb{Z}[s, s^{-1}, t, t^{-1}])$.

Данное представление отправляет элемент ядра представления Бурау группы PB_5 не в единичную матрицу, то есть оно сильнее!

n = 3

Утверждение

(3, k, d) - неточное представление для $k \geq 2$.

Рассмотрим элемент $\gamma = f_d(\varsigma) = \varsigma(\tau\varsigma)^{d-1}$. Для любого $d \in \mathbb{N}$ $\gamma^2 = E$. В частности, рассмотрим косы вида $\beta_m = \sigma_2^{2m}$. Тогда представление типа $(3, 3, d)$ не различает их, а точнее сопоставляет им единичную матрицу. Рассматривая косы $\alpha_m = \beta_m^{-1}$, получим аналогичное противоречие для типа $(3, 2, d)$.

План работы

Продолжить исследовать точность при различных значениях параметров. Построение инварианта узлов.