Теория детских рисунков и семейства Фрида

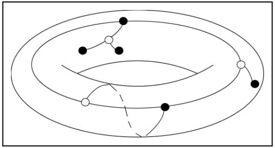
А.С. Фролов
Под руководством Г.Б. Шабата

МФТИ
Иновационный практикум

Апрель 2024

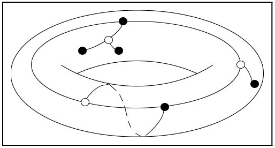
Напоминание

Категория детских рисунков $\mathcal{DESS}$: связные графы на сферах с g ручками, разбивающие поверхность на диски:

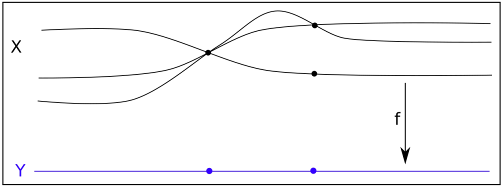


Напоминание

Категория детских рисунков $\mathcal{DESS}$: связные графы на сферах с g ручками, разбивающие поверхность на диски:



Категория пар Белого $\mathcal{BELP}(\Bbbk)$ над полем $\Bbbk$: категория пар $(\mathbf{X}, \beta)$ – алгебраической кривой $/\Bbbk$ и рациональной функции $\beta : \mathbf{X} \to \mathbb{P}^1$ с 3 критическими значениями. (Или что то же самое, разветвленных накрытий $\beta : \mathbf{X} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ с 3 точками ветвления).



Напоминание

Эквивалентность категорий:

$$\mathcal{DESS} \simeq \mathcal{BELP}(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{BELP}(\overline{\mathbb{Q}})$$

Напоминание

Эквивалентность категорий:

$$\mathcal{DESS} \simeq \mathcal{BELP}(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{BELP}(\overline{\mathbb{Q}})$$

Проблема:
Нарисовать пару Белого – легко.
Перейти от комбинаторики к алгебраической геометрии в конкретных вычислениях – тяжело.

Семейства Фрида

$\beta : \mathbf{X} \to \mathbb{P}^1$ с 3 критическими значениями – функция Белого. Объект дискретный.

Семейства Фрида

$\beta : \mathbf{X} \to \mathbb{P}^1$ с 3 критическими значениями – функция Белого. Объект дискретный.
$\Phi : \mathbf{X} \to \mathbb{P}^1$ с 4 критичиечскими значениями – функция Фрида. Появялется 1 степень свободы, можем "деформировать" вдоль комплексной кривой.

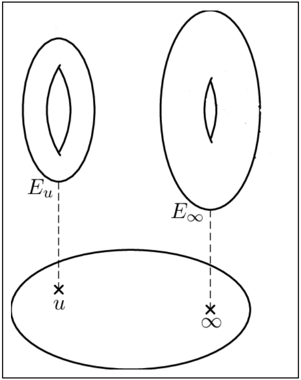
Семейства Фрида

$\beta : \mathbf{X} \to \mathbb{P}^1$ с 3 критическими значениями – функция Белого. Объект дискретный.
$\Phi : \mathbf{X} \to \mathbb{P}^1$ с 4 критичиечскими значениями – функция Фрида.
Появлется 1 степень свободы, можем "деформировать" вдоль комплексной кривой.
Более формально, семейство Фрида:

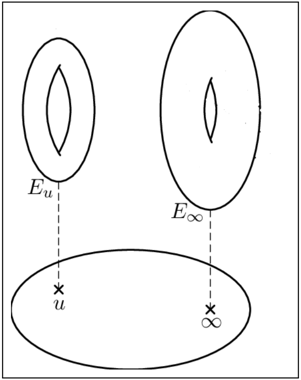
$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F} & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{P}^1 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ \mathbf{B} & & \end{array}$$

$\mathbf{F}$ – поверхность, $\mathbf{B}$ – кривая, π – плоский морфизм, для общих $b \in \mathbf{B}$ ограничение на слой $\Phi|_{\pi^{-1}(b)}$ – функция Фрида.

Плоский морфизм



Плоский морфизм



$$\mathbf{F} = \{y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\} \subseteq \mathbb{C}^3_{(x,y,\lambda)} = \mathbb{A}^3,\ \mathbf{B} = \mathbb{C} = \mathbb{A}^1$$

$$\pi : (x, y, \lambda) \mapsto \lambda$$

Пример семейства Фрида

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{P}^1 \\ \mathbf{B} & \end{tikzcd}$$

База:

$$\mathbf{B} := \{4a^2 + \lambda^2 = 4\} \subseteq \mathbb{A}^2_{(a,\lambda)} \backslash \{\lambda = 0, \lambda = \pm 2\}$$

Поверхность:

$$\mathbf{F} := \{z^4 y^2 = x^6 + \lambda x^3 z^3 + z^6\} \subseteq \mathbb{P}^2_{(x:y:z)} \times \mathbf{B}$$

Плоский морфизм:

$$\pi : \mathbf{F} \to \mathbf{B} : (x : y : z; a, \lambda) \mapsto (a, \lambda)$$

Функция Фрида:

$$\Phi : \mathbf{F} \to \mathbb{P}^1 : (x : y : z; a, \lambda) \mapsto (y - az^3 : x^3)$$

Пример семейства Фрида

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{P}^1 \\ \mathbf{B} & \end{tikzcd}$$

Степень функции Фрида:

$$\deg(\Phi|_{\mathbf{F}_{(a,\lambda)}}) = 6$$

Критические значения функции Фрида:

$$\mathrm{CritVal}(\Phi|_{\mathbf{F}_{(a,\lambda)}}) = \{-1, 0, 1, a\lambda\}$$

Вырождения в функции Белого при $\lambda = \pm\sqrt{2},\ a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Что ищем?

Знаем 2 пары Белого степени 5 на кривых рода $g = 2$:

$$(\{y^2 = x^5 + 1\}, (x, y) \mapsto y)$$

$$(\{y^2 = x^6 + \frac{118}{5}x^3 + 1\}, \ \ldots)$$

Что ищем?

Знаем 2 пары Белого степени 5 на кривых рода $g = 2$:

$$(\{y^2 = x^5 + 1\}, (x, y) \mapsto y)$$
$$(\{y^2 = x^6 + \frac{118}{5}x^3 + 1\}, \ \dots)$$

Как их деформировать в семейства Фрида степени 5?
Лежат ли они в одном семействе Фрида?

Что ищем?

Знаем 2 пары Белого степени 5 на кривых рода $g = 2$:

$$(\{y^2 = x^5 + 1\}, (x, y) \mapsto y)$$

$$(\{y^2 = x^6 + \frac{118}{5}x^3 + 1\},\ \ldots)$$

Как их деформировать в семейства Фрида степени 5?
Лежат ли они в одном семействе Фрида?
Казалось бы, "соединить параметрами" с помощью

$$\{y^2 = ax^6 + bx^5 + cx^3 + 1\}$$

Переформулировка в терминах пространства модулей кривых

Пространством модулей алгебраических кривых рода g называется

$$\mathcal{M}_g(\mathbb{C}) := \{[\mathbf{X}] \mid \mathbf{X} - \text{кривая } /\mathbb{C} \text{ рода } g\}$$

Теорема (Риман)

$\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ – *алгебраическое многообразие комплексной размерности*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_g(\mathbb{C}) = \begin{cases} 3g-3, & g \geq 2 \\ 1, & g = 1 \\ 0, & g = 0 \end{cases}$$

Переформулировка в терминах пространства модулей кривых

- Если слои семейства Фрида не изоморфны, $\mathbf{B} \to \mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ – кривая в пространстве модулей.

Переформулировка в терминах пространства модулей кривых

- Если слои семейства Фрида не изоморфны, $\mathbf{B} \to \mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ – кривая в пространстве модулей.
- Можем попасть в "тривиальную деформацию"

Переформулировка в терминах пространства модулей кривых

- Если слои семейства Фрида не изоморфны, $\mathbf{B} \to \mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ – кривая в пространстве модулей.
- Можем попасть в "тривиальную деформацию"
- $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ – многообразие с особыми точками (орбифолд). Более того,
$$[\{y^2 = x^5 + 1\}] \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$
– особая точка.

Переформулировка в терминах пространства модулей кривых

- Если слои семейства Фрида не изоморфны, $\mathbf{B} \to \mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ – кривая в пространстве модулей.
- Можем попасть в "тривиальную деформацию"
- $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ – многообразие с особыми точками (орбифолд). Более того,
$$[\{y^2 = x^5 + 1\}] \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$
– особая точка.
- У $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ есть рациональная параметризация (инварианты Игузы): $\{y^2 = x^5 + 1\}$ лежит в точке $(0, 0, 0)$, а координаты $\{y^2 = x^6 + \frac{118}{5}x^3 + 1\}$ – очень большие иррациональные числа

Переформулировка в терминах пространства модулей кривых

- Если слои семейства Фрида не изоморфны, $\mathbf{B} \to \mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ – кривая в пространстве модулей.
- Можем попасть в "тривиальную деформацию"
- $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ – многообразие с особыми точками (орбифолд). Более того,
$$[\{y^2 = x^5 + 1\}] \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$
– особая точка.
- У $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ есть рациональная параметризация (инварианты Игузы): $\{y^2 = x^5 + 1\}$ лежит в точке $(0, 0, 0)$, а координаты $\{y^2 = x^6 + \frac{118}{5}x^3 + 1\}$ – очень большие иррациональные числа
- Попробовать использовать дифференциальную геометрию (теория деформаций Кодаиры):
$$T_{[\mathbf{X}]}\mathcal{M}_g(\mathbb{C}) \simeq H^1(\mathbf{X}, \mathcal{T}_{\mathbf{X}})$$
$$T^*_{[\mathbf{X}]}\mathcal{M}_g(\mathbb{C}) \simeq H^0(\mathbf{X}, \omega_{\mathbf{X}}^{\otimes 2}) = H^0(\mathbf{X}, 2K_{\mathbf{X}})$$

Еще раз про $\deg \Phi = 6$

Можно немного обобщить:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{P}^1 \\ \mathbf{B} & \end{tikzcd}$$

База:

$$\mathbf{B} := \{4a^2 + \lambda^2 = 4\} \subseteq \mathbb{A}^2_{(a,\lambda)} \setminus \{\lambda = 0, \lambda = \pm 2\}$$

Поверхность:

$$\mathbf{F}_n := \{z^{2n-2}y^2 = x^{2n} + \lambda x^n z^n + z^{2n}\} \subseteq \mathbb{P}^2_{(x:y:z)} \times \mathbf{B}$$

Плоский морфизм:

$$\pi_n : \mathbf{F}_n \to \mathbf{B} : (x : y : z; a, \lambda) \mapsto (a, \lambda)$$

Функция Фрида:

$$\Phi_n : \mathbf{F}_n \to \mathbb{P}^1 : (x : y : z; a, \lambda) \mapsto (y - az^n : x^n)$$

На самом деле:

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{F}_{n;b}) \simeq \mathbb{Z}/2 \times D_n,$$

$$\Phi_n|_{\mathbf{F}_b} = (\mathbf{F}_{2;b} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1) \circ (\mathbf{F}_{n;b} \to \mathbf{F}_{2;b})$$

На самом деле:

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{F}_{n;b}) \simeq \mathbb{Z}/2 \times D_n,$$

$$\Phi_n|_{\mathbf{F}_b} = (\mathbf{F}_{2;b} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1) \circ (\mathbf{F}_{n;b} \to \mathbf{F}_{2;b})$$

Более того, такое семейство Фрида изоморфно кривой

$$\mathcal{M}_{g;\mathbb{Z}/2\times D_n}(\mathbb{C}) := \{[\mathbf{X}] \mid \mathrm{Aut}(\mathbf{X}) \simeq \mathbb{Z}/2 \times D_n\} \hookrightarrow \mathcal{M}_g(\mathbb{C})$$

На самом деле:

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{F}_{n;b}) \simeq \mathbb{Z}/2 \times D_n,$$

$$\Phi_n|_{\mathbf{F}_b} = (\mathbf{F}_{2;b} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1) \circ (\mathbf{F}_{n;b} \to \mathbf{F}_{2;b})$$

Более того, такое семейство Фрида изоморфно кривой

$$\mathcal{M}_{g;\mathbb{Z}/2\times D_n}(\mathbb{C}) := \{[\mathbf{X}] \mid \mathrm{Aut}(\mathbf{X}) \simeq \mathbb{Z}/2 \times D_n\} \hookrightarrow \mathcal{M}_g(\mathbb{C})$$

Теорема

Пусть $\mathbf{X}$ – кривая рода g. Если $\#\mathrm{Aut}(\mathbf{X}) > 4(g-1)$, то рациональная функция

$$\mathbf{X} \to \frac{\mathbf{X}}{\mathrm{Aut}(\mathbf{X})} \simeq \mathbb{P}^1$$

имеет ≤ 4 критических значений.

Можно ли построить по этим данным семейство Фрида?

Можно ли построить по этим данным семейство Фрида?
Да:

Утверждение

Пусть $\mathcal{M}_{g;G}$ *– кривая,* $\mathbf{X} \to \mathcal{M}_{g;G}$ *– универсальное семейство. Тогда сущетсвует открытое по Зарискому* $U \subseteq \mathcal{M}_{g;G}$ *и* $\Phi : \mathbf{X}_U \to \mathbb{P}^1$*, что*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X}_U \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & \mathbb{P}^1 \\ U & \end{tikzcd}$$

– семейство Фрида. Причем $\Phi|_{\mathbf{X}_b} = (\mathbf{X}_b \to \frac{\mathbf{X}_b}{G})$*.*

Детский рисунок на базе

Пусть есть семейство Фрида с критическими значениями $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ (которые зависят от точчки $b \in \mathbf{B}$). Построим эллиптическую кривую

$$\mathbf{E}_b := \{y^2 = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)(x - c_4)\}$$

тогда определена функция Белого на базе $\mathbf{B}$:

$$\beta_{bas} := \frac{j(\mathbf{E}_b)}{1728}$$

Детский рисунок на базе

Пусть есть семейство Фрида с критическими значениями $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ (которые зависят от точчки $b \in \mathbf{B}$). Построим эллиптическую кривую

$$\mathbf{E}_b := \{y^2 = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)(x - c_4)\}$$

тогда определена функция Белого на базе $\mathbf{B}$:

$$\beta_{bas} := \frac{j(\mathbf{E}_b)}{1728}$$

В нашем случае получится

$$\beta_{bas} = \frac{(3a^2\lambda^2 + 1)^3}{27a^2\lambda^2(a^2\lambda^2 - 1)^2}$$

Детский рисунок на базе

Можно нарисовать детский рисунок на $\mathbf{B} \simeq \mathbb{P}^1$: