Применение методов оптимизации к математической модели расширения производства

Гасеев Арсений

26 Марта 2024

Научный Руководитель - Александра Александровна Жукова
Кафедра - ММССиО ВЦ РАН

Введение

Прибыль является одним из ключевых показателей эффективности деятельности компании и каждой компании необходимо распределять ресурсы таким образом, чтобы получить максимально возможную прибыль. Задача максимизации прибыли обычно представляет собой динамическую оптимизацию. В этой работе наша цель посмотреть как может быть представлена данная модель, как на ней работают классические методы оптимизации и выбрать наилучший из них.

Постановка Задачи(1)

Пусть:

- x_t - деньги, полученные с продажи за t месяцев
- u_t - процент прибыли t-го месяца, идущий на расширение производства
- $\alpha > 0$ - коэффициент, характеризующий вклад инвестиций в расширение
- $\mu = 1 - \beta$, где β - коэффициент пропорциональности прибыли и вкладываемых денег в производство
- x_0 - стартовый капитал

Постановка Задачи(1)

Тогда наша задача имеет вид:

$$\sum_{t=0}^{T-1}(\mu - u_t)x_t \to max$$

$$s.t. x_{t+1} = x_t + \alpha u_t x_t$$

$$x(0) = x_0 > 0$$

$$0 \le u_t \le \mu$$

Аналитическое решение задачи(1)

Необходимые условия в форме уравнения Беллмана для целевой функции S_t:

$S_t(x_t) = \max_{\{0 \le u \le \mu\}}((\mu - u_t)x_t + S_{t+1}(x_{t+1}))$

s.t. $S_T(x_T) = 0$

С помощью метода динамического программирования, двигаясь с конца в начало, было получено решение:

Аналитическое решение задачи(1)

$$u_t^{opt} = \begin{cases} \mu, & \text{если } (T - t - 1)\mu\alpha - 1 > 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1}$$

Сведение к задаче линейного программирования

Пусть $u_t = v_t/x_t$. Тогда:

- $$x_{t+1} = x_t + \alpha v_t = x_0 + \alpha \sum_{i=0}^{t} v_i$$
- $$v_t \leq \mu x_t \Rightarrow v_t \leq \mu x_0 + \alpha\mu \sum_{i=0}^{t-1} v_i$$
- $$\sum_{t=0}^{T-1} (\mu - u_t) x_t = T\mu x_0 + \sum_{t=0}^{T-1} (\mu\alpha(T - 1 - t) - 1) v_t$$

Сведение к задаче линейного программирования

Наша задача примет вид:

$$T\mu x_0 + \sum_{t=0}^{T-1} (\mu\alpha(T-1-t)-1)v_t \to max$$

$$s.t. v_t \geq 0$$

$$v_t - \alpha\mu \sum_{i=0}^{t-1} v_i \leq \mu x_0$$

$$v_0 \leq \mu x_0$$

Симплекс-метод

Применение симплекс-метода для нашей задачи с помощью библиотеки PuLP

```
from pulp import LpMaximize, LpProblem, LpStatus, lpSum, LpVariable
import numpy as np

#Вводим T, mu, alpha, x0
T = int(input())
mu = float(input())
alpha = float(input())
s = float(input())

#Создаем нашу модель
model = LpProblem(name="simplex_test", sense=LpMaximize)
v = {i: LpVariable(name=f"v{i}", lowBound=0) for i in range(0, T)}
model += (v[0] <= s * mu)
model += (v[0] >= 0)
for i in range(1, T):
  model += (v[i] >= 0)
  model += ((v[i] - alpha * mu * lpSum(v[j] for j in range(0, i)) <= s * mu))
model += T * mu * s + lpSum(((mu * alpha * (T-1-i) - 1) * v[i]) for i in range(0, T))

#Вызываем COIN-OR Linear Programming Solver (CLP), который использует симплекс метод
status = model.solve()

#Выводим результаты
print(f"status: {model.status}, {LpStatus[model.status]}")
print(f"objective: {model.objective.value()}")
for var in v.values():
    print(f"{var.name}: {var.value()}")
```

Симплекс-метод

Результаты работы симплекс-метода:

T	μ	α	x_0	Analytic sol	Simplex sol
10	0.3	0.9	5	25.175237482	25.175237482
10	1	0.5	5	256.2890625	256.2890625
8	0.4	0.8	5	24.28766208	24.28766208
8	0.9	0.7	4	135.03866027	135.03866027
7	0.9	0.8	4	108.38638508	108.38638508
7	1	0.2	4	28.8	28.8
3	1	0.2	4	12.0	12.0
8	0,314	0.276	6,02	15.12224	15.12224

План работы на семестр

- Свести задачу (1) к задаче линейного программирования
- Посмотреть как работает градиентный спуск на задаче(1) в нелинейном виде
- Сформулировать модель с венчурным инвестированием
- Записать модель в виде оптимизационный задачи(2)
- Переформулировать модель с использованием штрафных функций
- Исследовать работу методов оптимизации на нашей новой модели
- Сравнение результатов и вывод о лучшем методе для задачи(2)

Используемые материалы

Application of Machine Learning in the producer's optimal control problem with non-stable demand (Authors: Aleksandr Delev, Aleksandra Zhukova, Anna Flerova)
https://ieeexplore.ieee.org/document/9803997