Разрезание центрально-симметричного многоугольника на две конгруэнтные части

Садовничий Антон (МФТИ)
Научный руководитель:
Канель-Белов Алексей Яковлевич (Bar Ilan University)
kanel@mccme.ru

26 марта 2024 г.

Содержание

Формулировка

Общая формулировка

Ограниченную центрально-симметричную фигуру в $\mathbb{R}^n$, содержащую свой центр симметрии, разбили на две конгруэнтные части. Верно ли, что центр симметрии обязательно лежит на общей границе двух частей?

Ответ: к сожалению, нет. Ниже будет контрпример.

Гипотеза

Выпуклую ограниченную центрально-симметричную фигуру в $\mathbb{R}^n$ разбили на две конгруэнтные части. Верно ли, что центр симметрии обязательно лежит на общей границе двух частей?

Простейший частный случай фигуры – шар D^n. Доказательство остается в качестве упражнения слушателям.

Плоский случай

Далее мы будем рассматривать задачу в основном на плоскости.

Теорема 1

Если две части, на которые разбита фигура, переводятся друг в друга движением, не являющимся поворотом, то утверждение в изначальной формулировке верно.

Доказательство (автор: Максим Бидва)

По теореме Шаля о классификации движений, все движения плоскости относятся к одному из следующих типов:

- Осевая симметрия
- Скользящая симметрия
- Параллельный перенос
- Поворот

Для параллельного переноса работает доказательство от противного: предположим, что некоторая окрестность центра симметрии целиком лежит в части А. Из параллельного переноса и симметрии получаем, что сдвинутая в обе стороны окрестность лежит в части Б. Продолжая рассуждение, получаем, что фигура неограничена.

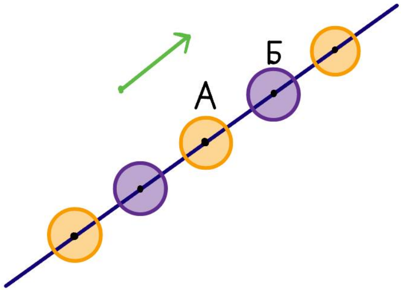

Рис. 1: Параллельный перенос

Доказательство Теоремы 1: скользящая симметрия

Для осевой и скользящей симметрии выполнено следующее утверждение: ровно половина площади многоугольника находится по каждую сторону от оси симметрии. Таким образом, центр симметрии многоугольника лежит на оси симметрии. Для осевой симметрии на этом доказательство окончено, для скользящей симметрии используется рассуждение, аналогичное параллельному переносу.

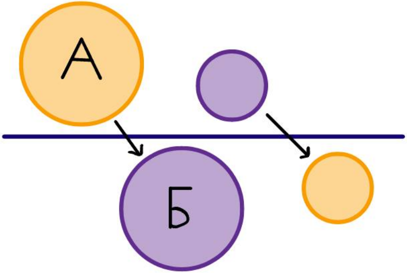

Рис. 2: Равенство площадей

Контрпример

Разбиение центрально-симметричного невыпуклого многоуголька на две части, не удовлетворяющее изначальной формулировке.

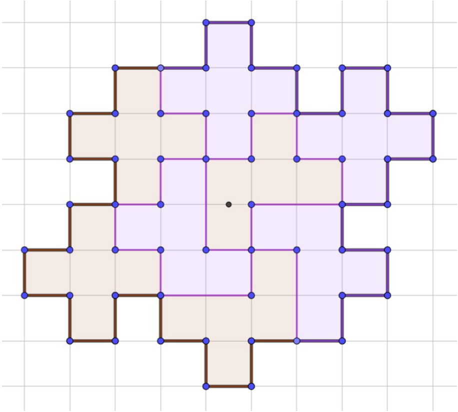

Рис. 3: Авторы: Максим Бидва, Юрий Маркелов

Контрпример

Разбиение центрально-симметричного невыпуклого многоугольника на две части, не удовлетворяющее изначальной формулировке.

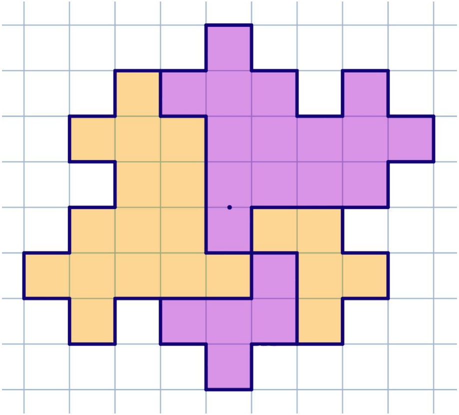

Рис. 4: Авторы: Максим Бидва, Юрий Маркелов

Теорема 2

Центрально-симметричный многоугольник разбит (несамопересекающейся) ломаной на две связные конгруэнтные части. Тогда центр симметрии лежит на ломаной разбиения.

Напомним, что мы можем считать, что движение, переводящее одну часть в другую (назовем их А и Б) - это поворот.
Под *участком границы* многоугольника мы будем понимать несколько подряд идущих сторон границы многоугольника (возможно, все, но хотя бы одна).

Лемма[1]

Существует общий участок границы изначального многоугольника и части А, который при повороте переходит в общий участок границы многоугольника и части Б.

[1] Lemma 2 из Eriksson, K. (1996). Splitting a Polygon into Two Congruent Pieces. The American Mathematical Monthly, 103(5), 393–400.

Иллюстрация к лемме

Наблюдение

Наибольший по включению участок границы, подходящий условию Леммы, имеет общий конец с одним из концов ломаной и в этой же точке общий конец со своим образом при повороте.

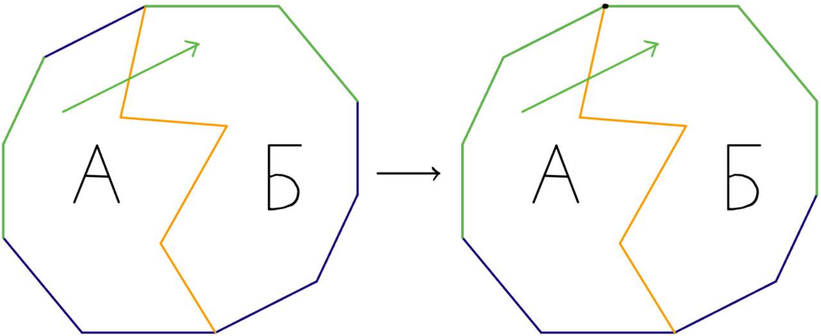

Рис. 5: Участок границы из Леммы отмечен зеленым цветом

Для начала заметим, что из равенства периметров частей А и Б концы ломаной - центрально-симметричные точки.

Первый случай

Вся общая граница А и многоугольника перешла в общую границу Б и многоугольника.

В таком случае поворот - это автоматически центральная симметрия, которая сохраняет многоугольник на месте.

Рис. 6: Ломаная центрально-симметрична

Второй случай

Второй случай

Образ ломаной при повороте пересекается с прообразом хотя бы по одному ребру.

В этом случае получается, что сумма углов при начале ломаной равна 360°, что невозможно.

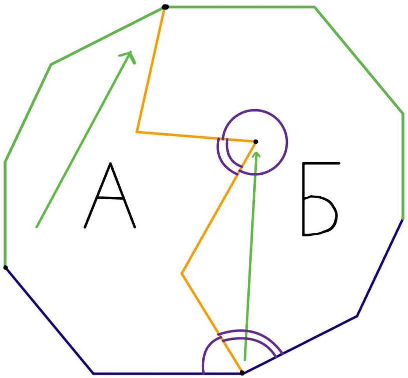

Рис. 7: Сумма углов с одной и двумя дужками - 360°

Третий случай

Образ (и прообраз) ломаной разбиения при повороте целиком лежит на границе многоугольника.

Рассмотрим прообраз ломаной (l_1 на рисунке). Запустим следующий процесс: отразим центрально-симметрично l_1, если образ имеет хотя бы одно общее ребро с l_2, завершим. Иначе повернем образ из Б в А, опять отразим относительно центра симметрии и т.д.

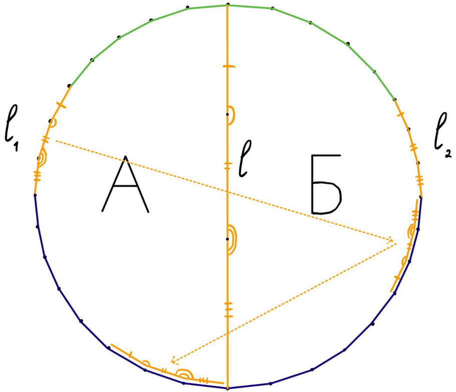

Рис. 8: Ломаная l_1 отражается и поворачивается до пересечения с l_2

Третий случай: иллюстрация

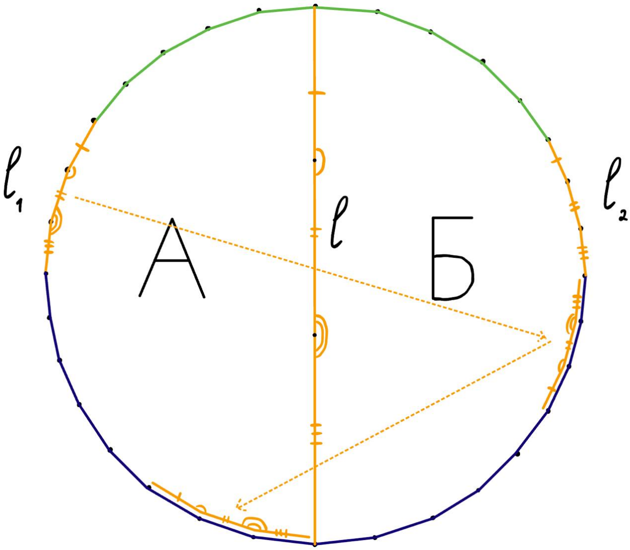

Рис. 9: Ломаная l_1 отражается и поворачивается до пересечения с l_2

Третий случай: первый вариант

Первый вариант

Образ l_1 целиком совпал с l_2.

В этом случае равенство сторон и углов показывает, что ломаная симметрична относительно центра симметрии многоугольника.

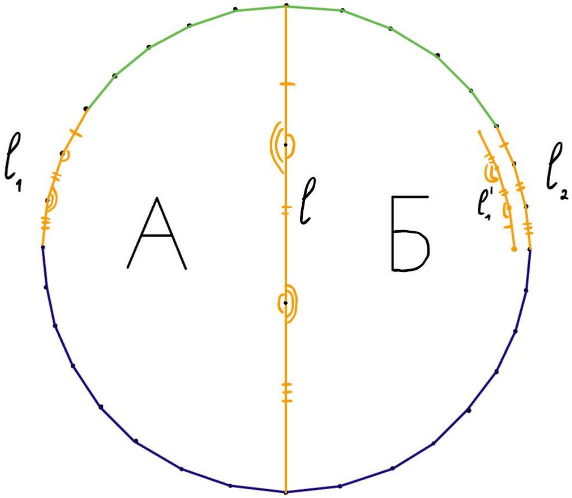

Рис. 10: Ломаная центрально-симметрична

Третий случай: второй вариант

Второй вариант

Образ l_1 пересекается с l_2, но не совпадает.

В этом случае получаем, что сумма углов при начале ломаной равна 360°, что невозможно.

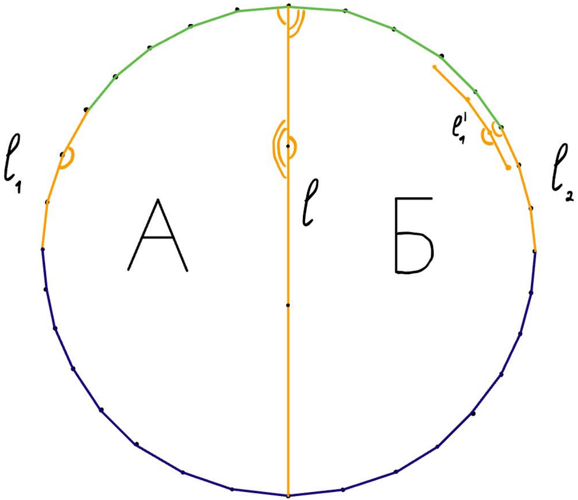

Рис. 11: Сумма углов с одной и двумя дужками - 360°

Обобщения

1. Теорема 1 обобщается на случай пространства: аналогичным образом доказывается для параллельного переноса и зеркальной симметрии. Однако в пространстве остается больше видов движений, для которых не проходит это доказательство.
2. Теорема 2 обобщается на произвольную фигуру, граница которой – кусочно-гладкая несамопересекающаяся кривая, разбитую на две связные части кусочно-гладкой кривой. Возникает техническая сложность в том, что у кривой нет понятия угла, но она преодолима.
3. Контрпример очевидным образом обобщается на большие размерности.

Планы

1. В плоском случае решить задачу для разбиения выпуклого многоугольника на необязательно связные части.
2. Получить продвижения в пространстве и больших размерностях.

Спасибо за внимание!