# Анализ реализаций симплекс-метода в решателях с открытым кодом

Федоренко Екатерина
Научный руководитель: Роланд Хильдебранд
Команда: Екатерина Федоренко, Денис Лейбман

Московский физико-технический институт

*fedorenko.es@phystech.edu*

19 марта 2024 г.

## Содержание

# Линейная программа

Mixed-Integer Programming (MIP) Problems - тип задач, где x рассматривается из целого множества.

**Linear programming**

$$\min_{x \geq 0} \; c^T x : Ax = b, \tag{1}$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n, 0 < \operatorname{rk} A = m < n$.

# MIP Problem

Целочисленное программирование является NP-трудной задачей. Частный случай 0-1 целочисленного линейного программирования, в котором переменные принимают значения только 0 или 1, является одной из 21 NP-полных задач Карпа.

# Примеры

- Производственное планирование
  Компания может определить оптимальные объемы производства различных продуктов с целью максимизации прибыли.
- Сети передачи данных
  Построение сети передачи данных так, чтобы обеспечить предопределённые требования за минимальную цену.
- Маршрутизация транспортных средств
  Определение оптимальных маршрутов для транспортных средств для минимизации общего расстояния или времени в пути

# Способы решения

- Игнорировать ограничение целочисленности на переменные x, решить соответствующую задачу ЛП, а затем округлить компоненты решения полученной задачи
- Эвристические методы(имитация отжига)
- Метод ветвей и границ с использованием *симплекс-метода*.

# Прямая и двойственная задачи

## Прямая задача

Задача (1) называется *прямой* задачей.

## Двойственная задача

Предположим, что существует такое $y \in \mathbb{R}^n$, что $c \geq A^T y$ и также пусть $v^*$ — оптимальное значение задачи. Тогда для любого допустимого $x$ верна оценка

$$y^T b = y^T Ax \geq c^T x.$$

Итак, введя *невязку* $s = c - A^T y$, получаем следующую задачу:

$$\max_{s \geq 0, y} \; b^T y : s + A^T y = c. \tag{2}$$

# Достаточное условие оптимальности

Так как матрица $A$ полноранговая, мы можем выразить $y$ через $s$:

$$y = (AA^T)^{-1}A(c - s),$$

причем $c - s \in \operatorname{Im} A^T$. Аналогично мы можем выразить $s$ через $y$:

$$s = c - A^T y.$$

Теперь не имеет значения, что называть решением двойственной задачи: $s$ или $y$. Пусть $(x, s)$ — пара из допустимой точки в прямой и двойственной задачах. Тогда

$$c^T x - b^T y = c^T x - x^T A^T y = c^T x - x^T (c - s) = x^T s.$$

Мы получили достаточное условие оптимальности точек $x, s$ для своих задач: $x_i s_i = 0, \forall i \in [n]$. Оно называется *условием дополняющей нежесткости*.

# Основные теоремы

**Theorem (Теорема о сильной двойственности)**

*Пусть задачи (1) и (2) допустимы. Тогда их оптимальные значения совпадают, оптимальные решения $x, y, s$ удовлетворяют условиям дополняющей нежесткости.*

**Lemma (Основная лемма)**

*Пусть задачи (1) и (2) допустимы. Тогда есть оптимальные решения $x^*, s^*, y^*$ и подмножество индексов $B \subset [n]$, $|B| = m$, такие что:*

- *Подматрица $A_{*B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ невырождена.*
- *Подвектор $x^*_N \in \mathbb{R}^{n-m}$ нулевой, где $N = [n] \setminus B$.*
- *Подвектор $s^*_B \in \mathbb{R}^m$ нулевой.*

# Симплекс-метод

Множества индексов $B$ и $N$ называются соответственно *базисным* и *небазисным*.
Пусть есть $B \subset [n]$ и допустимые в своих задачах $x, y, s$, причем выполнены свойства из основной леммы. Тогда мы можем выразить все через множество $B$:

$$x_B = A_{*B}^{-1} b, x_N = 0, s_B = 0, y = A_{*B}^{-T} c_B, s_N = c_N - A_{*N}^T A_{*B}^{-T} c_B.$$

Итак, существует всего $C_n^m$ возможных кандидатов на роль $B$. Цель симплекс-метода — перебрать эти подмножества и найти оптимальное.

# Симплекс-метод

В процессе работы симплекс-метода поддерживается так называемая симплекс-таблица, которая содержит информацию о текущем базисе. Каждый новый переход состоит в том, что некоторый индекс $i \in N$ входит в $B$ и некоторый индекс $j \in B$ выходит из $B$ и переходит в $N$. Они называются соответственно *входящим* и *выходящим*.
Эти преобразования записываются как домножение справа матрицы $A_{*B}$ на матрицу элементарного преобразования.

# Наша работа и ее мотивация

Цели:

- Разобраться с работой симплекс метода
- Собрать список проблем, с которыми приходится сталкиваться во время реализации
- Проанализировать солверы с открытым кодом и собрать способы решения возникающих проблем

# Наша работа и ее мотивация

План работы:

- Разобраться с работой симплекс метода
- Разобрать вместе с Денисом солвер HiGHS, познакомиться со способами решать вычислительные проблемы на его примере
- Разобрать 2 солвера самостоятельно(построить подробное описание работы солверов) и провести на них эксперименты
- Проанализировать получившиеся результаты, выбрать оптимальное решение вычислительных проблем

# Решатели с открытым кодом

**GLPK (GNU Linear Programming Kit)**

lpsolve
Mixed Integer Linear Programming (MILP) solver

HiGHS

SoPlex · SCIP · PaPILO · UG · GCG · ZIMPL
THE SCIP OPTIMIZATION SUITE

COIN|OR
COMPUTATIONAL INFRASTRUCTURE FOR OPERATIONS RESEARCH

# Хранение большой матрицы

Проблема:
Хранение матрицы коэффициентов.
Предположительные способы решения:

- Хранить только ненулевые коэффициенты
  Особенно полезно, если большинство элементов матрицы равны нулю
- Хранить отдельно по строкам/столбцам
- Хранить матрицу несколькими способами

# LU разложения

Проблема:

Процедура LU разложения. Нулевые элементы на диагонали

- Что такое ноль?
- Как бороться с малыми по модулю ведущими элементами(все элементы малы)?
- Как будет происходить LU разложение?(Переставляем строки/столбцы) Как это оптимально хранить и быстро искать нужный элемент.

# Правило выбора

Проблема:

Выбор pivot элемента

- Как выбирать элемент для прямого симплекса? Что если несколько соотношений нулевые?
- Как выбирать элемент для двойственного? Что если несколько коэффициентов цен нулевые?

# Литература

Chvátal V. "Linear Programming"